DISSERTATIO DE MARIS AESTU,

AC PRAESERTIM DE VIRIBUS LUNAE, SOLISQUE MARE MOVENTIBUS,

QUAM EQUITI

CAJETANO ANTINORIO

URBEVETANO ORDINIS S. STEPHANI PRIORI, UNI EX AETRURIAE REGENTIBUS, ATQUE A SECRETIS BELLICIS CONSTITUTO,

VINCENTIUS BUCELLIUS

In obsequentis animi pignus consecrat, atque publicè ad defendendum proponit.

AUCTORE LEONARDO XIMENIO S. I.
S. C. M. GEOGRAPHO.

FLORENTIAE ANNO MDCCLV.
EX TYPIS PETRI CAJETANI VIVIANI.

CUM ADPROBATIONE.

PRAEFATIO.

Licet quaestionem hanc de MARIS AESTU *per sese arduam, atque difficilem praestantiores philosophi studio, atque industria planiorem effecerint, nonnulli tamen contra difficiliorem fecere. Nam post Newtonum, qui illam ad solidioris mechanicae leges revocavit,* (1) *Edmundus Halleius* (2) *Daniel Bernoullius* (3) *Leonardus Eulerus* (4), *Rogerius Boscovichius* (5) *Cavallerius, Mac-Laurinus* (6) *eandem ad caput resumere, atque magis, magisque perficere aggressi sunt. Verum hac in re illud aliquibus contigit, quod magnis viris in arduis argumentis usuvenire solet, ut dum unusquisque pro suo ingenio methodos diversas, ac plerumque difficiliores prosequitur, ita in diversa abeant, ut unus cum altero non consentiat, atque aliquando etiam unus idemque secum ipse pugnare videatur. At inter hasce pugnas, atque discordias non ita facile est veritatem deprehendere. Nam formulae analyticae satis implexae, satisque compositae sunt evolvendae; tota formularum series ad earum elementa revocanda est; una cum altera comparanda. Quae omnia non modo*

 ty-

(1) Philos. Nat. Princ. Math. Lib. III. Prop. XXXVI. & XXXVII.

(2) In primo volumine miscell. curios. & in transactionibus Phil. N. 162.

(3) Traitè sur le Flux, & reflux de la Mer.

(4) Inquisitio Physica in causam fluxus, & refluxus maris.

(5) Dissertatio de maris aestu Romae MDCCXLVII.

(6) De causa Physica fluxus maris. Dissertationes Bernoulli, Mac-Laurini, Euleri, & Cavallerii habes in opusculis a Paris. Scient. Acad. praemio donatis.

tyrones, verum etiam mathematicos ipsos ita fatigant, ut aliquando sine magno labore ancipites, quam cum ingenti de rerum exitu certi esse malint. Huiusmodi est Euleri, & Mac-Laurini exemplum; quorum alter, longioribus formulis usus, vires solares ad mare attollendum dimidii pedis parisiensis fore demonstrat; alter verò synthesi solidiore pedem unum aequare contendit. Bernoullius cum Mac-Laurino in mensura virium conspirat, at in ratione virium Lunarium atque solarium ab Eulero, ac Mac-Laurino dissentit. Quare quantae difficultatis esse indicabimus, veritatem ipsam in tantorum virorum dissensu laborantem, in suum locum, ac quodammodo sedem restituere? Illud igitur primum est, quod in hac quaestione curabo, ut videlicet in scriptorum discordia veritas eruatur. Alterum est, ut faciliori synthesi, aut saltem formulis simplicioribus ad tyronum captum accommodatis, problemata aestuum resolvantur. Tertium, ut quaestio tota in difficilioribus praesertim phoenomenis pertractetur. Haec vero, ut dilucide peragerem, quaestionem ipsam in quatuor partes dividendam iudicavi; quarum prima mechanica est, agitque de viribus ☼ & ☾ mare moventibus; altera hydrostatica, quae quidem fluidum aliquod in siphone communicante per vices oscillans contemplatur, sine qua obscuriora aestus phoenomena vix illustrantur. Tertia est historica, utpote quae aestus phoenomena accurate enarrat. Postrema demum est comparativa. Narrata enim phoenomena cum theoria virium ☼, & ☽, atque fluidi oscillantis comparat, invicemque componit, ut singulis enarratis phoenomenis suae explicationes tribuantur.

Harum quatuor partium nunc prodit prima; reliquas dabo, ubi per tempus licebit.

DE

DE AESTU MARIS

RECIPROCO, AC PRAESERTIM DE VIRIBUS LUNAE, SOLISQUE AD MARE MOVENDUM.

§. I.

Cauſam aeſtus maritimi in ſole, ac luna eſſe repoſitam, aut ab iis luminaribus pendere, nemo ſane negabit, modo ſciat eiusdem aeſtus phoenomena. Ita enim tempus intumeſcentiae ab appulſu luminarium ad loci meridianum dependet, ita intumeſcentiarum menſtruarum incrementa cum conſpiratione luminarium coniuncta ſunt, ita vero ea a majori, minorique ſolis, lunaeque a terra diſtantia augeri videntur, ut, ſi quis neget aeſtus reciprocos a ſole lunaque generari, is eodem iure, & ferrum a magnete trahi, & paleas a corporibus electricis adduci, negare poſſit. Non enim nos aliter in cauſarum cognitionem venire poſſumus, niſi effectuum praeſentiam cum cauſae praeſentia, atque eorum magnitudinem cum cauſae energia conferendo ſimul, & comparando. Neque vero alia de ratione igni calorem tribuimus, niſi quod ad eius praeſentiam calorem excitari videmus, ac ſentimus; atque cum minori corporum ab igne diſtantia intenſiorem caloris ſenſum coniungi animadvertimus. Cum itaque dubitandum non ſit, cauſam aeſtuum maritimorum in ſole, lunaque eſſe conſtitutam, aut cum ipſorum actione coniunctam, duo ſuperſunt excutienda; ac primo quibus nam viribus ea luminaria marium intumeſcentiam creent; deinde, viribus etiam conſtitutis, definienda eſt ratio, methodus, ac leges, juxta quas vires iſtae agere debeant. Horum autem duorum quae ſuperſunt, non facilis eſt tractatio. Nam vires lunae ſoliſque in eorum vortice, aut vorticibus conſtitui poſſunt; horum vero vorticum apud primae notae ſcriptores tam magna eſt diſſenſio, ut ſi ea de re diſputare velim, finem diſputationis non inveniam. Sunt, qui vires iſtas in *attractione quadam mutua particularum* ſolis, lunaeque globum conſtituentium ſitas eſſe contendant; qui quidem, ſi *attractionis* vocabulo aut ſimplex phoenomenon, ut Newtonus, aut mechanicam aliquam actionem, aut cauſam ſignificant, audiri ſane poſſunt; ſi vero, aut *naturae legem*, aut non mechanicam, ſed *ſubſtantialem* quamdam corporum proprietatem intelligant, audiendi profecto non ſunt, utpote qui non cauſam Phyſicam, quam poſtul mus, ſed aut moralem, aut nullam producant. Ne itaque in ipſo quaeſtionis aditu, atque veſtibulo haerere miſerum in modum cogar, quaeſtionem de *gravitatis cauſa* alium in locum reiiciam; atque, quantum ad rem praeſentem pertinet, gravitatem telluris in ſolem, aut lunam, ut phoenomenon ex obſervatione petitum aſſumam. Quod quidem phoenomenon niſum in corpora maiora, qualia ſunt planetae ſatis aperte patefacit, de mutuo tamen ſingularum particularum acceſsu aut nihil omnino, aut nihil certi nobis innuere videtur. Itaque phoenomenon hoc gravitatis longe alia ſignificatione ego, atque Newtoniani uſurpamus. Ii enim ſingulas materiei particulas ubicumque poſitas tanquam totidem virium centra ponere conſueverunt; mihi vero ſatis eſt, ſi verſus maiora corpora gravitas concedatur.

§. II. Dico itaque, hodierno die pleriſque recentioribus mathematicis ab obſervatione conſtare de annua telluris noſtrae circa ſolem converſione, quod fare praeteritis philoſophis denegatum fuit. Neque illud una aut altera obſervatione conficiunt, ſed tot obſervationum ſeriebus, quot ſidera fixa in coelo micant. Quid enim, inquiunt, ſunt Bradleianae

 aber-

aberrationes siderum, nisi observationes certissimae, telluris motum significantes? Eae autem observationes ita in aliquibus fixis, iisque non paucis sunt institutae, ut nemini dubium sit, in omnibus profecto, quot observari possunt, eamdem aberrationem motus annui testem deprehendi. Tot itaque habemus, si velimus, eiusdem motus testimonia, quot sidera in coelo numerantur. Atque haec quidem illi. Ego vero, quid a siderum aberrationibus consequatur, non decerno. Telluris orbitam circa solem, ut hypothesim ad phoenomenon explicandum assumo. Si itaque tellus circa solem orbitam in sese redeuntem percurrit, solem versus feretur viribus quibusdam centripetis, illam continuo a recta linea removentibus, atque in eadem orbita retinentibus. Iis enim viribus seclusis, tellus non in orbita redeunte, sed in linea recta in infinitum pergeret, nisi aliquid super veniret, quod illam a recto tramite deflecteret. Quae sane, cum a mechanicis demonstrentur, restat, ut telluris gravitatio solem versus, ut phoenomenon certissimum, adhiberi possit. Verum non modo gravitas, sed etiam gravitatis lex ab immediata observatione derivatur. Orbita enim, quam tellus describit est elliptica, aut ferme elliptica; ostenditur vero a mechanicis Sectionem Conicam, quali est Ellipsis, describi non posse nisi a corpore versus centrum aliquod lato viribus decrescentibus in ratione distantiarum duplicata. Unde colligitur, vim illam gravitatis, qua tellus in solem fertur, eius naturae esse, ut eius vis, aut energia sese habeat, ut quadratum distantiae reciproce. Quamobrem telluris particulae in solem ferentur viribus sese habentibus ut quadrata distantiarum reciproce; illudque accurate, si tellus accuratam ellipsim describat, at proxime, si tellus orbitam proxime ellipticam percurrat.

§. III. Eodem prorsus argumento deducunt, lunae particulas ferri terram versus viribus sese habentibus in ratione reciproca duplicata distantiarum a telluris centro, vel accurate, vel proxime. Nam luna etiam movetur in orbita per telluris centrum transeunte, atque ad ellipsim, aut accurate, aut proxime accedente. Quare si de aestu reciproco lunae ageretur, haberemus duo phoenomena, unde eius explicationem petere possemus; lunae scilicet conversionem circa solem, atque eiusdem orbitam circa tellurem. Nunc vero cum

de

de aestu terrestri sermo sit, gravitationem particularum terrestrium in lunam, inquirere debemus. Atque ea quidem gravitatio ex principio reactionis a doctissimis philosophis deduci solet. Si enim vis haec mechanice agit, illud continget, quod in corporibus magneticis, atque electricis usuvenire solet; ut non modo ferrum, aut festucae in magnetem, aut electrum ferantur, verum etiam magnes, atque electrum in ferrum, aut festucas. Atque motus ibi sequetur, ubi vincibilis est resistentia. Si magnes libere appenso filo dependeat, ferrum vero manu retineatur, magnes ad ferrum accurret. Si tam ferrum, quam magnes libere pendeant, atque ad certam distantiam collocentur, motus erit reciprocus, tam scilicet magnetis ferrum versus, quam ferri versus magnetem. Si pondus magnetis, ferrique aequale sit, atque aequale etiam filum, cui uterque nectitur, aequales arcus accedendo describent. Contra si aequale filum, at pondus inaequale, arcuum illorum altitudines a puncto infimo erunt reciproce, ut pondera. Ex hisce principiis, atque observationibus colligitur, ut, cum mechanica sit telluris actio in lunam, ex reactione corpora haec girare debeant circa commune gravitatis centrum, quod distet a centris singulorum in ratione massarum reciproca; neque minus lunares particulae in terram vi gravitatis agantur, quam terrestres particulae faciant lunam versus. Verum, omisso etiam reactionis argumento, quod aliqua ex parte infirmum videri posset, non desunt aliae coniecturae ex ipsa corporum lunarium constitutione petitae. Corpora enim lunaria figuram sphaericam, aut quasi sphaericam affectant, quod sane contingere nequit, nisi vis quaedam insit tendens in lunae centrum, atque nisi haec vis magna sit. Si enim esset exigua, vires solis, terraeque perturbatrices notabilem lunaris figurae mutationem inducerent; quod quidem quum observationibus non sit consonum, inde profecto non modo de lunari gravitate, verum etiam de gravitatis magnitudine admonemur. Iam vero ex omnium mundanorum corporum analogia constat, gravitatem versus eorum contra ad magnam saltem distantiam diffundi, atque decrescere in eadem ratione, in qua crescunt distantiarum quadrata. Quare idem dicendum est de luna saltem ad terrestrem distantiam, cuius media

men-

mensura est 58. aut 59. Semid. terr. circiter. Quamobrem non modo ex reactionis principio, verum etiam ex lunari figura, atque aliorum planetarum analogia habebimus gravitatem particularum terrestrium versus lunam, atque gravitatis energiam in ratione reciproca duplicata distantiarum. Si itaque ex gravitate terrestrium particularum tam solem versus, quam versus lunam omnia aestus maritimi phoenomena sponte fluerent; ac si nulla demonstratio, nulla valida difficultas contra pugnaret, gravitas haec habenda esset ut vera, ac legitima causa aestus reciproci. At enim rem ita se habere demonstraturus sum, nihil videlicet esse, quod ex unico illo duplicis gravitatis principio explicari commode nequeat. Quamobrem cum illud demonstravero, de causa huius aestus dubitari minime poterit. Ad illud vero dilucide demonstrandum, praemittendae sunt propositiones aliquae, quibus effectus earum virium in globo terraqueo definiantur. Effectus hosce *virium* effectus nominabo, atque quid *virium* nomine veniat, satis, superque indicavi.

PROPOSITIO I.

Vim acceleratricem centri terrestris in Solem in media telluris a Sole distantia determinare.

§. IV. Antequam vim perturbatricem determinemus, oportebit vim solis acceleratricem, seu vim gravitatis centri terrestris solem versus accurate statuere. Inde enim omnis haec virium theoria desumenda est. Vis haec acceleratrix computatur in sinu verso arcus terrestris quam minimi in media a sole distantia. Assumamus itaque arcum 4'. gradus unius in orbita terrestri, qui profecto motu medio a tellure describitur intra tempus medium 5844''. Ad sinum versum eius arcus exacte constituendum utamur sinu recto arcus dimidii, qui est in tabulis 58. 18. Eo duplicato habemus chordam arcus 4'. quae videlicet erit partium 116. 36. Iam vero est circuli diameter ad chordam alicuius arcus, ut chorda eadem ad sinum versum arcus eiusdem. Instituta analogia, eruetur sinus versus ejus arcus 6. 72. quarum partium

tium 10000000 sinum totum constituunt; quare erit sinus totus ad sinum versum arcus 4′, ut 10000000: 6. 72. Iam posita solari parallaxi 10″, quot videlicet ex recentissimis observationibus deducitur, est media centri terrestris a sole distantia semidiametrorum terrestrium 20620, quae distantia, si ad pedes parisinos redigatur, posita terrestri semidiametro pedum 19695539, evadet pedum parisinorum 406122014180. Ut sinus versus 4′ eruatur in partibus pedis parisiensis, instituatur haec analogia, ut 10000000: 6. 72: 406122014180. ad quartum, qui evadet pedum parisiensium 272914. proxime. Hic videlicet est descensus telluris solem versus intra tempus idem, quo illum arcum describit, sive intra 5844″ temporis solaris medii. Iam ut vim acceleratricem centri terrestris, cum vi gravitatis terrestris in eiusdem superficie comparemus, oportebit supputare descensum nostrorum corporum vi gravitatis superficialis, si ea constans haberetur. Descensus liber gravium in nostra superficie vi gravitatis terrestris, tum media, tum primitiva (qualis videlicet hic est adhibenda) intra 1″ temporis medii a me supputatus est pedum parisiensium 15. 117, atque spatia descensuum sunt in ratione temporum duplicata. Colligimus inde corpora nostra constanti gravitate intra tempus 5844″ descensura per pedes parisinos 516280863. 312. Cum itaque tempora descensuum sint aequalia, vires erunt in ratione directa spatiorum. Vis scilicet acceleratrix centri terrestris, erit ad vim mediam primitivam terrestris gravitatis in superficie, ut 272914: 516280863, sive in terminis simplicioribus ut 1: 1890 quam proxime. Et haec est vis acceleratrix centri terrestris, ad vim gravitatis comparata, quae postulabatur.

COROLLARIUM I.

§. V. Sit nunc H M terrestris aequatoris Diameter (fig. I.) atque circulus B H D M ipsius aequatoris planum quiescens repraesentet. Per id planum transeat centrum solare S, sitque C S distantia media centri terrestris a solis

cen-

centro, quae scilicet posita est semidiametrorum terrestrium 20620. In terrestri semidiametro H C perpendiculari ad semidiametrum C B per ☉ centrum transeuntem, capiatur linea N C, quae totius semidiametri sit pars 1890.a Recta C S tanquam Asymptoto describatur hyperbola Asymptotica secundi generis, quae transeat per punctum descriptum N. Erunt semiordinatae ad hanc hyperbolam in ratione duplicata abscissarum reciproce. Itaque si ad punctum axis quodcumque ex. gr. T capiatur semiordinata T K, ea determinabitur sumendo quartam proportionalem ad ST^2, SC^2, & rectam definitam C N. Haec hyperbola, ut patet, erit locus virium acceleratricum respectu solis; atque in ea, data quacumque distantia a solis centro, determinari poterit vis acceleratrix ad eam distantiam, vis inquam, sub hypothesi, quod vis acceleratrix centri terrestris unitate exponatur.

COROLLARIUM II.

§. VI. Sit nunc recta S T aequalis terrestri semidiametro, atque quaeratur ad punctum T vis acceleratrix solaris in dictis hypothesibus. Fiet itaque ut $ST^2 : SC^2 = CN : TK$. Sed $ST = 1$, & $CN = 1$. Quare T K aequalis erit quadrato distantiae S C in semidiametris terrestribus expresso. Erit igitur $TK = 425184400$. At recta T K vocari solet ab Eulero vis solis absoluta. Quare vis ☉ absoluta in adductis hypothesibus erit 425184400. Quod si vis terrestris gravitatis ponatur, ut unitas, in hac nova hypothesi habebitur vis solis absoluta, si allatus numerus per 1890 dividatur, cuius divisionis quotus est proxime 225965, quae est vis absoluta acceleratrix solis, posita gravitate terrestri = 1. Aliquod intercedit discrimen inter vim hanc acceleratricem, atque Eulerianam in eodem sensu supputatam. Nam Eulero haec vis absoluta provenit (1) 227512, aliquanto maior vi superius a me definita. Verum discrimen hoc & exiguum est, & fortasse ab aliqua fractione, quam Eulerus in tot calculi elementis neglexerit,

B de-

(1) In eiusdem inquisitione Physica in causam Fluxus, & Refluxus §. 38.

deſcendit. Ipſe quidem eius computi elementa ſuppreſſit, quae ideo fuſe a me hactenus allata ſunt, ut unusquiſque de mea ſupputatione judicium ferre poſſit. Haec vero aliqua ſubtilitate a me ſubducta ſunt, propterea quod marium intumeſcentia ab hiſce elementis maxime pendet, ut videbitis.

PROPOSITIO II.

Data vi ſolis acceleratrice ad centrum terrae, vim eiusdem perturbatricem in canali telluris centrali determinare.

§. VII. SI vis acceleratrix conſtans eſſet, vis perturbatrix eſſet nulla. Si enim eadem vi punctum C ſolem verſus ferretur, qua alia puncta a C uſque ad B, totum fluidum in canali C B concluſum nullam omnino perturbationem ſentire poſſet; quod ex principiis mechanicae abunde patet; Perturbatio itaque fluidi oriri non poteſt, niſi a virium acceleratricum differentia, qua tantummodo fieri poteſt, ut pars una fluidi celerius, alia tardius ſolem verſus deſcendat; ex quo demum perturbatio motus oriri poteſt. Ramus hyperbolicus KOGN in ſuperiori propoſitione deſcriptus, differentias iſtas, unde res tota pendet, exhibebit. Cum enim ſemiordinata BG ad punctum aliquod B erecta, vim acceleratricem puncti eiusdem B iure nobis exponat, ſi ducatur linea N E rectae C B parallela, differentia rectarum B G, B E, ſeu recta E G vim ſolis perturbatricem relate ad punctum B repraeſentabit. Idem dicendo de aliis quibuscumque punctis canalis B C centrum ſolis reſpicientis, habebitur eodem pacto menſura vis perturbatricis pro iisdem punctis, quae petebatur.

COROLLARIUM I.

§. VIII. QUod ſi ratio quaeratur inter vim gravitatis, vimque ſolis perturbatricem, ſatis erit ponere lineam B F partium 1890, quarum N C eſt unitas; atque erit recta BF ad rectam E G, ut gravitas ſuperficiei terreſtris

ſtris ad vim ſolis perturbatricem in eadem ſuperficie. Erit autem N C : G B = S B² : S C², atque S B² : S C² = 425143161 : 425184400. Itaque erit B G = 1. 0000097. Quare G E = 0. 0000097. Unde erit B F : E G = 1890000000 : 97. Atque haec eſt proportio, quam terreſtris gravitas media primitiva in ſuperficie terreſti B obtinet cum vi ſolis perturbatrice ad idem punctum B.

COROLLARIUM II.

§. IX. EXigua illa portio rami hyperbolici G N a linea recta tam parum abludit, ut ſine ullo ſenſibili errore triangulum G E N pro triangulo rectilineo haberi poſſit. Quamobrem, ſi a quolibet alio puncto *a* eiusdem canalis ducatur perpendicularis *ab*, linea *be* exprimens eiusdem puncti vim perturbatricem, erit ut diſtantia *a* C ſine ullo errore ſenſibili. Unde fit hoc theorema. Vires perturbatrices canalis centralis ſolem reſpicientis ſunt inter ſe, ut diſtantiae punctorum a centro terrae.

COROLLARIUM III.

§. X. SI coniungantur puncta C F, triangulum F B C erit locus gravitatis in hypotheſi communiter accepta, quod gravitas punctorum terreſtrium in terrae viſceribus ſequatur directam diſtantiae rationem. Quare ſemiordinata *a f* exponet gravitatem puncti eiusdem *a*. Unde habemus hoc alterum theorema. Gravitas punctorum in canali ſolem reſpiciente, eſt in ratione vis ſolaris perturbatricis eiusdem puncti. Erit enim ſemper G E : B F = *be* : *af*.

COROLLARIUM IV.

§. XI. QUod ſi ramus idem hyperbolicus a puncto N continuetur uſque ad punctum V a ſole oppoſitum, ex iisdem rationibus vis perturbatrix ſolaris puncti *m*, erit aequalis differentiae duarum semiordinatarum N C, V D. Haec differentia ex computo evadit aequalis ferme differentiae antea inventae pro puncto B; atque discrimen tam exiguum est, ut merito contemni possit. Vires itaque solis perturbatrices tam pro canali solem respiciente, quam pro canali soli averso in aequalibus a centro distantiis pro aequalibus haberi possunt; atque non minus pro canali primo, quam pro secundo, locus virium perturbantium est triangulum rectilineum; atque utrobique gravitas particularum viribus earumdem perturbatricibus est proportionalis. Rursus cum in canali solem respiciente vis perturbatrix sit directe opposita vi gravitatis, atque vis acceleratrix centri minor sit vi acceleratrice particularum superiorum, actualis gravitatio in centrum C cuiuscumque particulae *a* aequalis erit differentiae duarum linearum *af*, *be*. Nec dissimiliter, cum in canali a sole opposito C D vis perturbatrix conspiret cum vi gravitatis, atque vis acceleratrix centri maior sit vi acceleratrice cuiuscumque particulae ex. gr. *n*, si sumatur D *m* = B F, ducaturque C *m*, differentia semiordinatae Q *n* a linea *po* exhibebit actualem gravitationem puncti *n* versus C. In utroque igitur canali omnia sunt ferme paria, & virium perturbantium rationes sunt ferme eaedem. Eadem vero haec omnia valent pro viribus perturbatricibus lunaribus, neque aliud est discrimen, nisi quod a diversa vi acceleratrice, ac diversis distantiis oritur. Habes itaque virium perturbantium theoriam pro utroque canali, atque etiam pro utroque luminari.

PROPOSITIO III.

Vim lunae perturbatricem in hypothesi, quod eius absolutae gravitas sit in ratione voluminis, determinare.

§. XII. Aut problema hoc in praesenti omittere oportebat, aut hypothesim aliquam lunaris gravitatis ab aestu maris non pendentem assumere. Cum enim luna sit telluris satelles, nec alium circa se satellitem habeat, eius gravitas acceleratrix, uti pro sole factum est, definiri non po-

poterat. Supereſt igitur, ut ab aliquo phoenomeno determinetur. At phoenomenon, a quo eam Newtonus, aliique determinaverunt, eſt ipſa marium intumeſcentia in aliquo portu diligenter obſervata. Id etiam ſuo loco egomet praeſtiturus ſum. Verum, cum locus hic ſolutionem pro ☾ ſibi poſtulet, cumque modo nequeam ſolutionem ab obſervationibus exhibere, malui hypotheſim aliquam ſequi, quam problema praetermittere. At eam hypotheſim adhibebo, quam poſtmodum ex obſervationibus corrigere potero. Aſſumo itaque gravitatem lunarem, coeteris paribus, relate ad gravitatem terreſtrem eſſe, ut lunae volumen ad volumen terreſtre. Nunc enim de maſſa loqui non poſſumus, neque hypotheſim de gravitatibus maſſis proportionalibus admittendam puto. At lunae volumen ad terrae volumen eſt ut 1 : 50. Quare gravitas acceleratrix lunae, coeteris paribus, erit ut $\frac{15.\ 117.}{50.}$ At enim mediocris centri terreſtris a lunari diſtantia ex obſervationibus ponitur ſemidiametrorum terreſtrium 58, vel 59. Quare ex priori diſtantia erit vis acceleratrix terreſtris in lunam $= \frac{15.\ 117.}{168200.} =$ pedibus paris. 0. 00000890. Eodem computo erit vis acceleratrix ſuperficiei ſubiectae in ☾ 0. 00000930. Differentia erit vis acceleratrix aquarum in ſuperficie lunae ſubiecta a viribus lunae genita, quae erit 0. 0000033. Itaque fiet gravitas terreſtris ad talem vim ☾ perturbatricem, ut 151170000: 33; ſive ut 4580606: 1. At pro luna gravitas perturbatrix ſuperficiei terreſtris oppoſitae ſenſibiliter differt a vi priori perturbatrice, ut ex computo apparebit. Erit enim vis acceleratrix ad diſtantiam 59 ſemid. = ped. par. 0. 00000868.

Et eius differentia a vi acceleratrice centrali ped. par. 0. 00000029, quae erit vis perturbatrix, quaeque notabiliter differt a vi perturbatrice ſubiectae ſuperficiei.

Erit itaque gravitas terreſtris ad vim lunae perturbatricem in oppoſita ſuperficie, ut 151170000: 29. Et illud eſt, quod quaerebatur.

COROLLARIUM.

§. XIII. Vim terrestris gravitatis ad vim solis perturbatricem in superficie telluris subiecta computavimus (Cor. I. Prop. II.) ut 1890000000: 97, sive proxime ut 19484450: 1. At vis terrestris gravitatis ad vim lunae perturbatricem in eadem superficie deducta fuit, ut 4580606: 1. Quare erit vis solis ad vim lunae perturbatricem in superficie terrestri subiecta, ut 458: 1948 proxime, sive vis solis ferme subquadrupla est vi lunari, ut subinde ex observationibus constabit.

PROPOSITIO IV.

Vires solis, lunaeque ad mare attollendum, sive in aequatoris, sive in meridiani plano in diversis gravitatum hypothesibus determinare.

§. XIV. Quaestiones duas diligentissime distinguere necesse est; altera quidem circa vires mare attollentes, altera circa deprimentes versatur; utraque significari consuevit sub nomine *virium mare moventium*. Quaenam sint vires attollentes, illud ex viribus ☉, & ☾ perturbatricibus maxime quaerendum. At vires deprimentes oriuntur ab aliis principiis, de quibus infra. Interea tamen moneo vires ipsas attollentes aqueam molem in locis sub sole jacentibus, atque ab ipso adversis mediate etiam deprimere in locis solem vel lunam in horizonte prospicientibus. Non enim alicubi intumescere oceanus potest, quin ex iisdem viribus, quibus intumescit, alibi detumescat. Detumescentiam hanc, ex aequilibrii lege potius, quam ex viribus externis nascentem, considerabo. Omittam modo alteram, ex viribus per sese, atque immediate deprimentibus oriundam, si oriri revera potest. Iam vero, ut casum simplicissimum adducam, pono canalem (fig. II.) centralem B C, alterutrum, aut utrumque luminare respicientem. Huic perpendicularem statuo canalem H M, cum eo communicantem. Totam denique in-

intumescentiam B O ab externis viribus ortam ab aquis in H M jacentibus desumo. Quamvis enim res ita non sit, sed sphaericus, aut ellipticus meniscus circa B attollatur, at zonula quaedam circa H, M deprimatur; tamen hanc menisci exuberantiam, eam vero zonulae depressionem perinde ferme se habere, atque si ex canali diametrali H M defluat tota aqua in C O, in posterum demonstrabo. Sit jam B M D H planum aequatoris, aut sit A N B t Q planum alicuius meridiani. Quoniam intumescentia B O desumenda est ex toto canali H M, aut A Q, in quatuor punctis H, M, A, Q, aqua detumescet aut dimidia, aut ferme dimidia intumescentia B O. Si H M sit aequatoris diameter, H R, aut M T $= \frac{1}{2}$ B O. Si A Q sit axis terrae idem continget. Quare inventa intumescentia O B pro qualibet gravitatis hypothesi, addendum est ipsius dimidium, ut habeatur tota differentia observata duarum linearum C R, C O. Problema hoc generaliter ita solvitur.

Ponamus B O esse intumescentiam in quavis gravitatis hypothesi. Erigatur perpendiculariter linea O I, aut O K gravitatem actualem puncti elevati O exponens juxta eam hypothesim. In ea assumatur linea O L repraesentans vim perturbatricem puncti O. Compleatur triangulum L O C, quod sine errore sensibili haberi poterit, ut locus virium perturbatricum in qualibet gravitatis hypothesi. Similiter supra canalem O C construatur figura juxta datam hypothesim scalam gravitatum exponens. Determinetur altitudo figurae I O B F, aut K O B F, quae & clausa sit intra scalam gravitatis, & aequalis interea sit triangulo L O C. Altitudo B O eius figurae erit elevatio aquarum in eadem hypothesi; cui, si addatur eiusdem dimidium, summa aequalis erit toti altitudini inter intumescentiam, ac detumescentiam intercurrenti. Haec omnia constant. Nam cum triangulum L O C sit locus virium elevantium, ipsius area diminutionem ponderis in canali C O repraesentabit. Quare ad pondus restituendum, quod sane ex aequilibrii legibus reposcitur, tantum elevari debebit aqua in B O, ut eius pondus aequet pondus amissum. At enim figura ex. caus. I O B F tale pondus exponit. Quare eius area, quaecumque sit, aream triangularem aequare debet. Interea vero

ca-

canali C H, aut C A nihil ponderis minuitur, aut augetur; cum intumeſcentiam B O ex novo fluido conflatam facere poſſimus. Quare ſeu canalis C H ſit aequatoris ſemidiameter, ſeu C A ſit ſemiaxis terreſtris, intumeſcentia B O perinde continget. Niſi haec ex peculiaribus gravitatum hypotheſibus illuſtrentur, vix ulterius clareſcere poterunt. Atque hoc problema tale eſt, ut niſi attente gravitatum hypotheſes conſiderentur, atque adhibeantur, in errores enormes incidamus.

Prima hypotheſis Galilaeana, atque Hugeniana conſtantis gravitatis.

§. XV. Sit itaque primo gravitas particularum in canali B C omnino conſtans, ut Galilaeus, atque deinde Hugenius poſuit. Quare ſcala gravitatum erit rectangulum O I M C, cuius altitudo ſit C O, baſis vero O I. Itaque figura I O B F erit ſimiliter rectangulum, cuius altitudo eſt B O, baſis vero conſtans illa linea B F. Cum itaque ex generali ſolutione triangulum L O C aequale ſit rectangulo O F, fiet haec analogia I O : O L = $\frac{1}{2}$ O C : B O. Itaque intumeſcentia quaeſita erit quartus terminus proportionis poſt gravitatem actualem puncti O, vim ſolis, aut lunae perturbatricem puncti O, atque ſemidiametri dimidium. At ex dictis vis gravitatis in ſuperficie eſt partium 1890000000, quarum vis perturbatrix eſt 97, atque ſemidiametri dimidium fieri poteſt pedum pariſienſium 9847769 $\frac{1}{2}$. Itaque quartus terminus, ſeu intumeſcentia B O fiet ped. pariſ. 0. 5054, cuius dimidium ſi addatur, evadet diſcrimen intumeſcentiae ped. par. 0. 7551. Ex proportione inter vires ſolares, ac lunares in eadem hypotheſi eruitur vis etiam lunaris. Atque haec ex ea hypotheſi conſequuntur. Verum haec hypotheſis gravitatis ab experimentis geographicis falſa convincitur.

Al-

Altera hypothesis Hermanni de gravitate ubique crescente in ratione distantiarum a telluris centro.

§. XVI. Alteram Hermanni hypothesim pervestigemus, juxta quam ponitur gravitas ubicumque crescens in directa distantiarum a centro ratione. Dixi ubicumque. Nam juxta Newtonianam etiam hypothesim gravitas in semidiametro C O crescit in ratione linearum *a* C, O C in ea semidiametro. At una semidiameter C O cum altera C A comparari non potest. In hac enim ad eamdem a centro distantiam major est gravitas, quam in semidiametro aequatoris C O. Posita itaque Hermanni hypothesi, patebit, juxta eam triangulum rectilineum K O C esse locum terrestrium gravitatum. Quare trapezium K O B F aequabit triangulum L O C. At in eo trapezio triangulum F I K tantillum est, si cum toto trapezio comparetur. Itaque contemni sine ullo errore sensibili potest. Supererit itaque, ut antea, rectangulum I O B F aequale triangulo L O C. Unde habetur eadem prorsus analogia. Et si etiam exiguum errorem ab omisso triangulo F I K, corrigere velis, seu si problema accurate resolvere jubeas, esto quaesita B O $= x$. Semidiameter C B $= S$. B F, seu gravitas in puncto B $= G$. Vis perturbatrix B E $= u$. Erues 1.° C B : C O = B E : O L, seu $S : S + x = u : \frac{(S+x)u}{S} =$ O L. Erues 2.° C B : C O = B F : O K, seu $S : S + x = G : \frac{(S+x)G}{S} =$ O K. Erues 3.° triangulum F B C $= \frac{1}{2} S G$. Erues 4.° triangulum K O C $= \frac{1}{2}(S+x) \times \frac{(S+x)G}{S}$. Unde fiet quadrilaterum K O B F $= \frac{1}{2}(S+x) \times \frac{(S+x)G}{S} - \frac{1}{2} S G$. At triangulum L O C $= \frac{1}{2}(S+x)\frac{(S+x)u}{S}$. Unde fiet aequatio $\frac{1}{2}(S+x) \times \frac{(S+x)G}{S} - \frac{1}{2} S G = \frac{1}{2}(S+x) \times \frac{(S+x)u}{S}$. Unde facili negotio eruitur valor ipsius x, qui aequalis evadet $\sqrt{\frac{S^2 G}{G-u}} - S$, qui sane sensibiliter non differt a valore prioris hypothesis. Atque, ut alter exiguus error caveatur, recta B F corrigenda est relate ad actualem aequatoris gravitatem. Nam adhibita antea fuit media primitiva gravitas. Si itaque problema hoc juxta rei veritatem resolvere velis, satis erit minuere vim gravitatis in ratione penduli terrestris medii primitivi ad pendulum actuale aequatoris. At pendulum medium primitivum est linearum parisiensium 441. 136, atque pendulum actuale aequatoris a Bouguerio omnimode redactum est 439. 210. Quare reperietur gravitas terrestris actualis aequatoris esse ad vim perturbatricem ut 18817482591: 97. Hisce elementis adhibitis, provenit aquarum elevatio in aequatore ped. parisiensium 0. 50763.

SCHOLION.

§. XVII. EUlerus idem problema solvens (1), vim solis elevantem reperit ped. 0. 5072; atque inde Newtonum, ac newtonianos accusat, quod erronea problematis solutione usi, multo maiorem vim solarem definiverint. At vereor maxime, ne quem paralogismum ipse in Newtono accusat, ipse idem non semel, sed bis committat. Nam aut Eulerus in duplici eiusdem problematis solutione putat, se hypotheses newtonianae gravitatis adhibere, & in ea re mirum in modum decipitur; aut censet hypotheses diversas a newtoniana gravitate tractare, & nihil est, cur de dissensu sui problematis a newtoniano miretur. Nihil, cur erroneas newtonianorum intumescentias redarguat. In diversis enim gravitatum terrestrium hypothesibus diversae intumescentiae supputantur, atque una intumescentia non modo dupla, sed tripla, aut quadrupla, aut quacunque ratione multipla alia intumescentia supputari poterit. Cum itaque Eulerus suum problema cum newtonianorum problemate comparet, necesse est ipsum de newtoniana gravitatis hypothesi cogitasse. Atque eam hypothesim in viribus lunae, solisque definiendis aperte sequitur; verum in terrestri gravitate adhibenda, a qua potissimum mensura intumescentiae pendet, a newtoniana gravitate aberrat ita, ut in prima solutione galilaeanam gravitatem adhibeat, in altera vero gravitatem Hermanni, li-

(1) Vid. eius inquisit. physicam in causam fluxus, & refluxus.

licet id nec affirmet, nec fortasse animadverterit. Nam prima eius problematis solutio eo redit. Toto cap. II. per formulas determinat vires puncti alicuius M, quod sit in telluris superficie (vide eius schema), quodque solis, vel lunae viribus sollicitetur tam versus telluris centrum, quam versus lineam, quae sit lineae centrali perpendicularis (1): Formulis ad hanc rem constitutis, cap. III. quaerit terrestrem figuram, quam vires tum ☼, tum ☾ telluri conciliare conantur. Id autem, ut obtineat, comparat vires solis, aut lunae cum vi gravitatis terrestris. *Praeter has vero vires*, *inquit*, (2) *punctum M gravitate naturali deorsum pellitur vi = 1 secundum directionem MC*. Quibus in verbis duo animadvertenda sunt, primo directionem illam MC esse centralem; quare Eulerus adhibet gravitatem primitivam centralem, quod in newtoniana gravitate falsum est, ut omnes norunt. Secundo, cum punctum M sit indeterminatum, cumque gravitas naturalis eius puncti ponatur = 1, patet Eulerum adhibere gravitatem superficialem primitivam constantem, quod iterum non newtonianae, sed galilaeanae gravitati cohoeret. Denique, hisce praemissis, curvam quaerit ex perpendiculorum lege, iuxta quam gravitas particularum internarum telluris est prorsus indifferens, neque nova haec hypothesis de internarum particularum gravitate problema eulerianum afficit. Quare res demum eo redit, ut Eulerus vel nolens problema resolvat in hypothesi galilaeana. Nihil ergo mirum, si euleriana intumescentia cum galilaeana tam belle consentiat. Nihil mirum si Euleri intumescentia tantopere discrepet a newtoniana. Discrepant enim maxime terrestris gravitatis hypotheses. Resoluto per legem perpendiculorum problemate, illud Eulerus recudit ex lege canalium centralium aequiponderantium (3). Atque hoc loco iterum in gravitatem centralem cadit, quae cum Newtono non consentit. Posita in terrae visceribus distantia elementi Mm indeterminata $= z$, gravitatem terrestrem facit ut z^n, videlicet in ratione distantiae ad quamlibet dignitatem n elavatae. Terrestrem semidiametrum primitivam facit $= 1$. Semidiametrum a perturbatione virium externarum acquisitam

C 2 tam

(1) Consule totum cap. II. suae inquisitionis.

(2) Consule §. 34.

(3) Consule §. 42.

tam $= b$. Statuto pondere columnae alicuius terrestris indeterminatae, cum directione ☾, & ☼ angulum indeterminatum constituentis, eam aequalem facit conatui, quo columna aequalis semid. terrae $= 1$ in statu naturali a sola gravitate deorsum nititur, quae vis ponitur $= \frac{1}{n+1}$. Quare in qualibet telluris semidiametro generaliter ponit gravitatem primitivam internam in ratione suae distantiae a centro, aut distantiae dignitatis. Id etiam falsum est in newtoniana gravitate. Nam in una semidiametro ex. gr. aequatoris gravitates internae sunt sane ut distantiae, at gravitates in semidiametro aequatoris ad eamdem a centro distantiam non sunt aequales gravitatibus aliarum semidiametrorum. Gravitas, quae generaliter fit in ratione distantiarum, est hypothesis Hermanni, non vero Newtoni. Quamobrem, cum Eulerus gravitates internas telluris faciat generaliter proportionales distantiis, aut earum dignitatibus, problema solvit revera in hypothesi gravitatis Hermanni. Cum vero excentricitas terrestris in hac hypothesi ferme aequalis sit excentricitati in hypothesi galilaeana supputatae, nihil mirum est, si, aliquibus fractionibus in utroque problemate contemptis, eadem curva Eulero proveniat, tam in prima, quam in secunda solutione. Ex his itaque colligimus, doctissimum virum, quem maxime veneror, aliquid humani esse passum, neque jure merito hac in re newtonianos accusare; cum ipse proplema solvat in hypothesi gravitatis terrestris, aut galilaeanae, aut hermannianae; quae sane multo minores fert intumescentias, quam hypothesis newtonianae gravitatis patiatur. Rogo eruditissimum virum, ut veniam concedat, si quid contra eius problemata proposui. Id enim & modeste feci, & necessitate compulsus; ne eius scilicet auctoritas, quae sane apud doctos magna est, meis hisce propositionibus, atque intumescentiarum computis, in quibus omnem diligentiam adhibui, aliquid immerito detraheret.

Tertia hypothesis newtoniana de attractione mutua.

§. XVIII. Pro hac hypothesi demonstravit doctissimus Clairaut, quod si vis centrifuga dicatur $= \varphi$, axium differentia est aequalis $\frac{5}{4}\varphi + \frac{5}{224}\varphi^2$ &c. ita ut in

solo

solo primo termino $\frac{5}{4}\varphi$ vix error ullus sensibilis inesse possit (1). At enim vis solis, aut ☾ perturbatrix tractari potest ut vis centrifuga. Itaque ad habendam in ea hypothesi intumescentiam, satis erit fractionem exprimentem vim perturbatricem per fractionem $\frac{5}{4}$ multiplicare. At ea fractio ex dictis §. XVI. est $\frac{97}{1881748259}$. Itaque axium differentia ex viribus ☼ orta erit $= \frac{5}{4} \times \frac{97}{1881748259}$. Assumamus 1.° semidiametrum aequatoris Bouguerianam (2), quae est pedum parisiensium 19686078, instituamusque hanc analogiam; ut 7526994116 : 485 = 19686078 ad quartum, qui exponet intumescentiam virium solarium attollentium pedis parisini 1, 26846. Assumamus iterum semidiametrum aequatoris Cassinianam pedum paris. 19679298 (3), atque mensuram virium elevantium priori sensibiliter aequalem reperiemus, seu pedum 1. 26802. At enim ex depressione fluidi addenda est semissis intumescentiae. Itaque differentia, seu summa virium solarium fiet pedum paris. 1. 90269, sive pedis unius, pollicum 10, linearum 10 proxime. Unde constat primo, quam erronea sit euleriana elevatio. 2.° quam proxima sit elevatio supputata newtonianae virium intumescentiae, quae ipsi evasit ped. 1, poll. 11. cum octava parte digiti. Non enim maius est discrimen lineis $3\frac{1}{2}$ ferme. At etiam assumendo semidiametrum aequatoris juxta newtonianam hypothesim accuratiorem, habebitur vis solis newtonianae proximior. At discrimen non tantum est, ut de eo solliciti esse possimus. In eamdem mensuram conspirant Daniel Bernoullius (4), ac Mac-Laurinus (5), quorum alter eam supputavit ped. 1. pol. 11. $\frac{1}{4}$, alter vero ped. 1, poll. $10 + \frac{86}{100}$.

CO-

(1) *Theorie de la terre* pag. 192. edit. paris. 1743.
(2) *Fig. de la terre* sect. VI. pag. 305.
(3) Vide Cassini de Thury *la meridienne de Paris*. pag. 144.
(4) Traite sur le reflux, & reflux de la mer n. xv. remarque.
(5) *De causa physica fluxus, & refluxus maris*, prop. V.

erit ex hoc capite intumescentia maxima ad minimam ut 100000 : 91729. Luna habere potest declinationem maximam 28.° 32′, cuius complementum est 61.° 25.′ Itaque ex hoc capite fiet intumescentia maxima ad minimam ut 100000: 87853. Haec est peculiaris ratio, cur luminaribus in aequatoris planum delatis intumescentia augeri debeat non modo sub terrestri aequatore, verum etiam aliis in locis plurimis ab aequatore remotis.

Quarta hypothesis de gravitate centrali decrescente in terrae visceribus in directa ratione alicuius dignitatis distantiarum a centro, at in terrae superficie in ratione reciproca alicuius alterius dignitatis earumdem distantiarum.

§. XXII. HYpotheses gravitatis hactenus allatae, aut falsae omnino sunt, aut magnas difficultates patiuntur. Falsas esse judico hypotheses duas Galilaei scilicet, atque Hermanni, quorum alter constantem adhibet gravitatem, alter vero eam ponit generaliter proportionalem distantiis a centro, neque multum in iis hypothesibus confutandis laborandum censeo, cum nullum, aut fermo nullum hodierno die asseclam habeant; contra vero newtoniana hypothesis mutuae attractionis particularum, nec paucos, nec mediocres ostentat sectatores. Nam tam est ingeniosa, tamque parum a veritate distat, ut plerisque nostri soeculi mathematicis arriserit. Verum in aliquibus a veritate certe distare in meis de figura telluris lectionibus ostensum a me fuisse arbitror, atque in dissertatione de *gravitatis causa* clarius, nisi fallor, ostendetur. Sed aliam hypothesim in citatis lectionibus attuli, quam video esse verisimiliorem, de gravitate scilicet centrali, quae in terrae visceribus decrescat in directa ratione alicuius dignitatis distantiarum a centro, at in superficie in ratione reciproca alterius dignitatis ab eodem centro, atque dignitates omnes expendendo tam pro gravitate superficiali, quam pro gravitate interna telluris,

tan-

tandem reperi, quod ſi gravitas ſuperficialis primitiva ſiat in ratione reciproca ſubduplicata diſtantiarum a centro, gravitas vero interna in ratione directa diſtantiarum ad dignitates $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ elevatarum, talis inde graduum terreſtrium magnitudo, talis etiam pendulorum longitudo proveniat, qualis ad rite repraeſentandas obſervationes poſtulatur; quod neſcio, an aliis gravitatum hypotheſibus contigit. Quare operae pretium erit eam hypotheſim in graviſſima hac quaeſtione de maris aeſtu adhibere. Iam vero ad computandam in hac hypotheſi marium elevationem adhibendam judico formulam ſatis expeditam, quam in telluris figura a viribus centrifugis oriunda in geographicis lectionibus adhibui. Sit igitur gravitas actualis aequatoris $= G$, atque vis perturbatrix ſolaris $= 1$. In eo caſu erit $G = 19399466$. Iam vero ſit $\frac{1}{p} =$ exponenti dignitatis in gravitate partium internarum telluris. Sit denique $x =$ ſemidiametro aequatoris poſt intumeſcentiam in hypotheſi, quod eius differentia a priori ſit $= 1$. Erit ex demonſtratis in ea lectione $x = \frac{G\,p}{p+1}$. Sit igitur primo exponens dignitatis $= \frac{1}{6}$ ſeu $p = 6$, erit $x = \frac{6\,G}{7}$. Quare ſemidiameter acquiſita per intumeſcentiam erit ad ſemidiametrum primitivam ut 16628113 ad 16628112. Quare ſemidiameter aequatoris erit ad intumeſcentiam ut 16628.13 ad 1. Ea vero ſemidiameter ex dictis ponitur ped. pariſ. 19686078. Erit igitur intumeſcentia ex viribus ſolaribus oriunda in hoc caſu pedum pariſ. 1. 183. Addatur vero eiusdem ſemiſſis 0. 5915. Et erit intumeſcentia totalis ex viribus ☼ orta pedum 1. 7745. Verum ex allata proportione erit intumeſcentia totalis ex lunae viribus oriunda ped. pariſ. 8. 1627. Quare ſumma virium totalium a ☼, & ☾, genitarum erit ped. 9. 9372.

§. XXIII. Fiat 2.° exponens dignitatis $= \frac{1}{5}$ & erit $x = \frac{5\,G}{6}$. Quare fiet ſemidiameter aequatoris ad intumeſcentiam ut 16166222 : 1. Unde poſita iterum ſemidiametro aequatoris ped. pariſ. 19686078, proveniet intumeſcentia ex viribus ☼ attollentibus pedum parisiensium 1. 217. Addatur eius semissis 0. 6085, & erit intumescentia totalis ex viribus ☼ ped. 1. 8255, & ex proportione intumescentia totalis ex ☾ viribus genita erit ped. 8. 3973. Quare intumescentia totalis ex viribus ☾, & ☼ coniunctim erit ped. 10. 2228.

§. XXIV. Sit 3.º exponens dignitatis $\frac{1}{4}$, & erit $x = \frac{4G}{5}$. Quare fiet semidiameter aequatoris ad eiusdem intumescentiam ex viribus ☼ in hoc casu, ut 15519575 : 1. Posita autem de more semidiametro aequatoris in pedibus parisinis reperietur intumescentia ex ☼ viribus pedum 1. 268. Addatur eius semissis 0. 634, eritque intumescentia totalis ex ☼ viribus genita pedum 1. 922. Ex proportione intumescentia totalis ex ☾ viribus erit pedum 8. 7492. Quare intumescentia totalis ex ☾, & ☼ viribus genita erit pedum 10. 6512.

§. XXV. Sit denique expones dignitatis $= \frac{1}{3}$, & erit $x = \frac{3G}{4}$. Quare fiet semidiameter aequatoris ad eiusdem intumescentiam ex viribus ☼ in hoc casu, ut 14549599 : 1. Quare adhibita semidiametro aequatoris in pedibus parisinis, fiet intumescentia ex viribus ☼ pedum 1. 353. Addatur eius semissis pedum 0. 6765. Fiet intumescentia totalis ex ☼ viribus genita ped. 2. 0295. Ex allata proportione erit intumescentia ☾ totalis ped. 9. 3357. Unde erit pro hoc casu intumescentia totalis ex ☾, & ☼ viribus ped. 11. 3652. Iam vero, si quis consideret intumescentias maritimas in hac hypothesi gravitatis genitas juxta diversos distantiarum exponentes, animadvertet pro dignitate $= \frac{1}{4}$ eamdem ferme intumescentiam provenire, quam in sua attractionum hypothesi longe diversis principiis Newtonus supputaverat. At pro dignitatibus $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$ intumescentias tantillo minores supputari. Contra pro dignitate $\frac{1}{3}$ intumescentias maiores sensibiliter iis, quas a Newtono habemus. Quare, si hactenus hypothesis newtoniana aestuum phoenomenis satis superque idonea est habita, non video cur idem de mea gravitatis hypothesi non liceat affirmare? Quare censeo hypothesim hanc explicandis aestuum maritimorum intumescentiis peropportunam. Si quis

autem

autem causam physicam huius gravitatis postulet, sciat idem, causam hanc, si non certissimam, certe probabilem non deesse, eam vero alio loco declarandam, ubi de causa gravitatis agendum erit. Coeterum cum newtoniana hypothesis, atque mea mirum in modum in dimensione intumescentiae conspirare videantur, liceat in posterum una, aut altera hypothesi indifferenter uti.

PROPOSITIO V.

Determinare terrestris figurae mutationem ex viribus solaribus oriundam in hypothesi newtoniana, atque in nostra.

§. XXVI. POnamus (fig. III.) HBMD esse aequatoris planum, atque novam figuram ex solis viribus ortam fieri HOMG, ponendo scilicet nunc ad aequilibrium restituendum novas aquas affundi, adeoque axem HM eiusdem magnitudinis perseverare, quod licet falsum sit, tamen inde nihil determinatio novae figurae immutatur. Quod de plano aequatoris, idem de eiusdem parallelis, atque idem etiam de meridianis sine errore sensibili asseri potest. Assumatur punctum quodlibet N novae figurae, atque ab eo ducantur semiordinatae NT, N*o*. Construatur autem figura triangularis KOC prorsus ut in superiori propositione, atque producatur N*o*, donec concurrat in *l*, *p*, *k* cum lineis LC, PC, KC. A puncto N ducatur perpendicularis NR ad curvae arculum in N, sive ad tangentem puncti N. Recta linea NT in utraque hypothesi, aut accurate, ut in newtoniana, aut proxime, ut in mea, repraesentabit gravitationem puncti N axem versus. Similiter in utraque hypothesi triangulum QSC exponet gravitationem primitivam puncti *b* versus axem, atque triangulum *l* C *p* gravitationem actualem puncti eiusdem post virium accessionem. At triangulum *l* C *p* aequat triangulum QSC, triangulum vero LCP aequat triangulum FBC. Et triangulorum aequalium bases sunt reciproce, ut altitudines; erit itaque *lp*: SQ = CS: C*o*, sive *lp*: SQ = T*b*: TN. Similiter LP: FB = CB: CO. Sed LP: FB = *lp*: SQ, ut facile est demonstrare. Quare fiet CB:

ribus ☉ attollentibus pedum parisiensium 1. 217. Addatur eius semissis 0. 6085, & erit intumescentia totalis ex viribus ☉ ped. 1. 8255, & ex proportione intumescentia totalis ex ☾ viribus genita erit ped. 8. 3973. Quare intumescentia totalis ex viribus ☾, & ☉ coniunctim erit ped. 10. 2228.

§. XXIV. Sit 3.° exponens dignitatis $\frac{1}{4}$, & erit $x = \frac{4G}{5}$. Quare fiet semidiameter aequatoris ad eiusdem intumescentiam ex viribus ☉ in hoc casu, ut 15519575 : 1. Posita autem de more semidiametro aequatoris in pedibus parisinis reperietur intumescentia ex ☉ viribus pedum 1. 268. Addatur eius semissis 0. 634, eritque intumescentia totalis ex ☉ viribus genita pedum 1. 922. Ex proportione intumescentia totalis ex ☾ viribus erit pedum 8. 7492. Quare intumescentia totalis ex ☾, & ☉ viribus genita erit pedum 10. 6512.

§. XXV. Sit denique expones dignitatis $= \frac{1}{3}$, & erit $x = \frac{3G}{4}$. Quare fiet semidiameter aequatoris ad eiusdem intumescentiam ex viribus ☉ in hoc casu, ut 14549599 : 1. Quare adhibita semidiametro aequatoris in pedibus parisinis, fiet intumescentia ex viribus ☉ pedum 1. 353. Addatur eius semissis pedum 0. 6765. Fiet intumescentia totalis ex ☉ viribus genita ped. 2. 0295. Ex allata proportione erit intumescentia ☾ totalis ped. 9. 3357. Unde erit pro hoc casu intumescentia totalis ex ☾, & ☉ viribus ped. 11. 3652. Iam vero, si quis consideret intumescentias maritimas in hac hypothesi gravitatis genitas juxta diversos distantiarum exponentes, animadvertet pro dignitate $= \frac{1}{4}$ eamdem ferme intumescentiam provenire, quam in sua attractionum hypothesi longe diversis principiis Newtonus supputaverat. At pro dignitatibus $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$ intumescentias tantillo minores supputari. Contra pro dignitate $\frac{1}{3}$ intumescentias maiores sensibiliter iis, quas a Newtono habemus. Quare, si hactenus hypothesis newtoniana aestuum phoenomenis satis superque idonea est habita, non video cur idem de mea gravitatis hypothesi non liceat affirmare? Quare censeo hypothesim hanc explicandis aestuum maritimorum intumescentiis peropportunam. Si quis

autem

autem caufam phyficam huius gravitatis poftulet, fciat idem, caufam hanc, fi non certiffimam, certe probabilem non deeffe, eam vero alio loco declarandam, ubi de caufa gravitatis agendum erit. Coeterum cum newtoniana hypothefis, atque mea mirum in modum in dimenfione intumefcentiae confpirare videantur, liceat in pofterum una, aut altera hypothefi indifferenter uti.

PROPOSITIO V.

Determinare terreftris figurae mutationem ex viribus folaribus oriundam in hypothefi newtoniana, atque in noftra.

§. XXVI. POnamus (fig. III.) HBMD effe aequatoris planum, atque novam figuram ex folis viribus ortam fieri HOMG, ponendo fcilicet nunc ad aequilibrium reftituendum novas aquas affundi, adeoque axem HM eiusdem magnitudinis perfeverare, quod licet falfum fit, tamen inde nihil determinatio novae figurae immutatur. Quod de plano aequatoris, idem de eiusdem parallelis, atque idem etiam de meridianis fine errore fenfibili afferi poteft. Affumatur punctum quodlibet N novae figurae, atque ab eo ducantur femiordinatae NT, N*o*. Conftruatur autem figura triangularis KOC prorfus ut in fuperiori propofitione, atque producatur N*o*, donec concurrat in *l*, *p*, *k* cum lineis LC, PC, KC. A puncto N ducatur perpendicularis NR ad curvae arculum in N, five ad tangentem puncti N. Recta linea NT in utraque hypothefi, aut accurate, ut in newtoniana, aut proxime, ut in mea, repraefentabit gravitationem puncti N axem verfus. Similiter in utraque hypothefi triangulum QSC exponet gravitationem primitivam puncti *b* verfus axem, atque triangulum *l*C*p* gravitationem actualem puncti eiusdem poft virium ☼ acceffionem. At triangulum *l*C*p* aequat triangulum QSC, triangulum vero LCP aequat triangulum FBC. Et triangulorum aequalium bafes funt reciproce, ut altitudines; erit itaque *lp* : SQ = CS : C*o*, five *lp* : SQ = T*b* : TN. Similiter LP : FB = CB : CO. Sed LP : FB = *lp* : SQ, ut facile eft demonftrare. Quare fiet CB :

CO = Tb : TN, quae quidem est ellipseos proprietas. Quare in newtoniana hypothesi, atque in mea, curva quam mare induit ex viribus solaribus est elliptica, aut accurate, aut proxime.

SCHOLION.

§. XXVII. IN lectione IV. circa telluris figuram demonstratum a me fuit, quam figuram tellus induat ex virium centrifugarum accessione; adeoque, si quis accuratam, geometricamque eius figurae in mea hypothesi descriptionem desideret, illam lectionem consulat, necesse est. Nunc autem eam curvam ellipsi proximam affirmavi, non in omni significatione, sed tantummodo relate ad maris intumescentias in eadem hypothesi in quacumque data latitudine inveniendas. Coeterum non sum nescius, eam figuram pro ellipsi sumi non posse, ubi gradus aliquis meridiani (aut quid simile) supputandus proponatur. Sunt nonnulli usus in geographia, in quibus unius pro altera figura acceptio nullum errorem sensibilem parit, ut in re nostra. Sunt vero alii, in quibus error excrescit, atque evadit satis notabilis, si sua curva non utamur.

COROLLARIUM I.

§. XXVIII. INventa figura telluris, quam generant novae vires ☼, aut ☾, pronum est pro qualibet data latitudine intumescentiam determinare. Sit enim BHDM meridiani planum, atque punctum b sit punctum datum. Mutata figura, intumescentia eius puncti perpendiculariter sumpta, erit linea r N quae supputatur instituendo duas analogias. Fiat itaque 1.°, ut CO : TN = BO : bN, atque bN erit intumescentia in paralleli plano definita. Cum lineola b r tanquam recta, & ad RN perpendicularis assumi possit, cumque angulus N b r sit complementum latitudinis loci, instituatur haec altera analogia. Ut sinus totus ad sinum complementi latitudinis, ita bN, seu intumescentia loci in parallelo computata, ad quartum terminum Nr, qui profecto in-

intumescentiam loci b repraesentabit. At enim sine errore sumi potest OC : NT, ut sinus totus ad sinum complementi latitudinis. Cum itaque OB : bN sit in ratione composita ex OC : NT, & ex Nb : Nr, atque eae proportiones sint ferme aequales, erit BO : bN in ratione duplicata sinus totalis ad sinum complementi latitudinis, seu intumescentia ad aequatorem est ad intumescentiam dati loci, ut quadratum sinus totalis ad quadratum sinus complementi latitudinis. Atque ita facillimum erit intumescentias in datis locis determinare.

COROLLARIUM II.

§. XXIX. Ac pro sole quidem tam pro locis ipsi subiectis, quam pro adversis eadem ferme est supputatio, verum non ita est, cum de luna agitur. Cum enim pro luna intumescentia BO loci in aequatore subiecti sensibiliter maior sit intumescentia DG loci oppositi, intumescentia non eodem modo pro utroque hemisphaerio definiri potest. Vera huius problematis solutio pendet a figura telluris, quam ex ☾ viribus induit, quam peculiari problemate investigabo. Nunc autem, si concipiamus semiellipsim HOM maioris excentricitatis, atque alteram HGM minoris, ita ut BO : DG sit in ratione 33 : 29, atque coetera fiant ut antea, obtinebitur pro datis locis intumescentia ex ☾ viribus orta. Poterimus etiam mediam quamdam intumescentiam inter BO, & DG assumere, quae sit partium 31, atque ita sine magno errore intumescentiam lunarem pro dato loco supputare, quemadmodum pro ☼ factum est, sive locus sit lunae subiectus, sive in parte adversa constitutus. Generaliter itaque de intumescentiis ita affirmare poterimus. Intumescentiae punctorum a puncto subiecto O in aequatore distantium, sive ea puncta sint in meridiano, sive in ipso aequatore, sive in plano alio quocumque intermedio, sunt ut quadrata sinuum distantiarum ab horizonte, distantiarum videlicet aut ☼, aut ☾ ab horizonte loci. Quod si punctum O non sit in aequatore, sed extra, idem theorema valebit praeterpropter pro locis quibuscumque. Ac, si coetera essent paria, sine ulla exceptione ne theorema idem esset pro locis quibuscumque; verum paria non sunt, ut videbimus.

PROPOSITIO VI.

Motum marium horizontalem ex viribus ☼, & ☾ perturbatricibus oriundum explicare.

§. XXX. AD explicationem Phoenomenorum, quae quidem, & multa, & difficillima sunt, ubi de aestu marium reciproco agitur, maximopere facit motus maritimi horizontalis cognitio, qui motus ab iisdem viribus perturbatricibus ortum ducit. Cum enim punctum quodvis maritimum *b* (fig. III.) in plano aequatoris, aut paralleli vi perturbatrice S*s* secundum directionem *b*N cieatur, cumque vis totalis *b*N resoluta sit in duas partiales *br*, *r* N, quarum posterior intumescentiam verticalem marium repraesentat, restabit vis *br*, quae quidem inutilis non est, neque ab ulla resistentia supprimitur, sed agit in aquas maritimas, illas ciendo ad motum horizontalem secundum lineam *br*. Est autem *b*N: *br*, ut sinus totus ad sinum arcus *b*B, at N*r*: *br* est, ut sinus complementi CS ad sinum eiusdem arcus. Quare pro quolibet puncto maritimo *b*, erit 1.° intumescentia iuxta planum paralleli ad nisum maris horizontalem, ut sinus totus ad sinum distantiae a meridiano; erit 2.° intumescentia verticalis ad nisum eumdem maris, ut sinus complementi distantiae a meridiano ad sinum distantiae eiusdem, & haec erit nisuum maris horizontalium theoria. Quod si casus peculiares considerare velimus, poterimus primo definire punctum in tellure, in quo nisus iste est maximus.

Fiat enim CS $= x$, & semidiameter telluris $= s$. Erit S$b = \sqrt{s^2 - x^2}$. At nisus *br* erit in ratione vis perturbatricis S*s*, quae quidem est ut CS, atque in ratione sinus distantiae a meridiano, qui erit $= \sqrt{s^2 - x^2}$. Quare momentum maris horizontale erit, ut $x\sqrt{s^2 - x^2}$. Ponamus

ali-

aliquam inconstantem y, quae momentum idem repraesentet. Fit $x \sqrt{s^2 - x^2} = y$. Differentiando fiet $\frac{s^2 dx - 2x^2 dx}{\sqrt{s^2 - x^2}}$ $= dy$. Unde tandem factis reductionibus habebitur $x = \sqrt{\frac{1}{2} s^2}$. Quare nisus erit maximus, ubi CS, aut Tb aequalis sit partibus 1071 semidiametri. Tunc autem arcus Hb erit 45.° Quamobrem tunc erit maximum marium momentum ad motum horizontalem concipiendum. Deinde patebit nullum esse motum horizontalem in H, & B. Nam in H, $x = o$. Quare totus nisus $= o$. In puncto autem B, $\sqrt{s^2 - x^2} = o$. Itaque deficiet etiam omnis nisus in eo puncto. Tertio, cum eadem ratio valeat pro altero arcu B M, & pro arcubus M D, H D, consequitur inde, quatuor esse puncta in toto circulo aequatoris, aut quolibet aequatoris parallelo, in quibus nisus horizontalis est maximus, eaque puncta distare a punctis B, & D 45.° Quarto intelligimus, ex iisdem viribus perturbatricibus in quatuor aequatoris, & parallelorum quadrantibus motum maris oriri debere versus puncta B, & D. Inde profecto non modo commodior explicatio aliquorum phoenomenorum aestus reciproci, verum etiam declaratio aliarum observationum ad euripos pertinentium planior redditur. Motus hic marium a plerisque physicis, qui hanc quaestionem pertractarunt, praetermissus est. Quare nihil mirum, si in aliquibus phoenomenis hoeserint.

COROLLARIUM I.

§. XXI. Ex motu maris horizontali a momento br genito, aliqua elevatio in recta verticali rN oriri poterit, si obstaculum aliquod contra eiusdem motum obiiciatur. Maior fiet ex hoc capite elevatio, si undae maritimae in littora incurrentes ad latera refluere non possint ob littorum concavitates, minor vero, si ob littorum, tum figuram, tum etiam exiguitatem facili negotio sese possint lateraliter diffundere, quemadmodum in parvis insulis continget.

Quod

Quod quidem certiſſimum eſt, atque experimentis obviis poterit confirmari. Si enim aquae venienti diverſa obſtacula opponas, diverſae ſcilicet figurae, diverſaeque magnitudinis, videbis aquarum intumeſcentiam diverſiſſimam obſervari. Si opponas ſiphonem normaliter recurvum, ita ut uno brachio directionem aquae reſpiciat, altero verticaliter ſupra fluidum erigatur, videbis ex Pitoti obſervationibus tantum ſupra libellam intra brachium verticale fluidum elevari, quantum corpus liberum deſcendere deberet ad acquirendam eam aquae velocitatem, qua in tubum incurrit. Si obſtacula concava obiicias ex concavitate creſcet aquarum coacervatio, at ſi rectilinea, aut convexa, parum intumeſcentiae obſervabitur. Iam vero littora tam varia ſunt, quam eſſe poſſunt. Itaque ex eorum diverſa figura, magnitudine, poſitione, diverſae contingent ex motu maris horizontali intumeſcentiae.

COROLLARIUM II.

§. XXXII. Ponamus aliquod littus adeſſe, quod in motu maris horizontali recipiendo imitetur accurate ſiphonis inflexi actionem poſitionemque: ponamus etiam maris momentum ita liberum eſſe, ut linea tota horizontalis br in verticalem converti poſſit. Quare tunc intumeſcentia aequalis erit duobus momentis; ſive intumeſcentia erit in ratione compoſita ex $N\kappa$, & br. At vero Nr eſt ut quadratum ſinus complementi diſtantiae a meridiano (per prop. V. cor. I.), & br eſt, ut ſinus ipſe diſtantiae. Quare intumeſcentia fiet ut $x^2 \sqrt{s^2 - x^2}$. Quo in caſu illud omnino mirum, atque inexpectatum continget, quod multa eſſe poſſint extra aequatorem puncta, atque ab eo multum diſſita, in quibus intumeſcentia compoſita ex momento verticali, & horizontali poſſit eſſe etiam maior, quam ſit in ipſo aequatore. Reperietur etiam per methodum differentialem punctum aliquod maximae compoſitae intumeſcentiae, quod ſubductis calculis contingit in parallelo, in quo $x = \sqrt{\frac{2}{3} s^2}$. Id autem continget, ubi arcus Hb ſit 41.° 48'.

Qua-

Quare, si omnes conditiones confluerent, maxima intumescentia non in puncto B, sed ad distantiam 48.° 42′. contingeret.

COROLLARIUM III.

§. XXXIII. At, si maxima intumescentia ibi constituatur, ubi summa duarum linearum $br + r$ N est maxima, reperietur punctum maris pertinere ad x aequalem $\frac{s}{\sqrt{2}}$, quod punctum non multum differt a priori. Erit enim Tb partium 7071 proxime, quibus respondet arcus 45°. adeoque eius differentia a meridiano fiet 45°. Verum ob marium resistentias, atque ob continuum decrementum nisus horizontalis hinc inde a puncto nisus maximi, nisus br non totum effectum prodere potest, sed effectum aliquem submultiplum effectus totius. Per sequens corollarium definietur punctum intumescentiae maximae pro dato casu.

COROLLARIUM IV.

§.XXXIV. Ponamus non assumi debere totam br, sed eius partem quamcumque $\frac{1}{n}$. In hypothesi antecedentis corollarii reperietur $x = \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$. Quare supponamus effectum aequalem esse $\frac{1}{2}$ br, sive $n = 2$.

Reperietur $x = \frac{4}{\sqrt{17}} s$. Sive $x = 0.9708$, cui respondet arcus Hb graduum 76,° 8′. Adeoque distantia a meridiano, ad quam maxima intumescentia pertinget, erit 13°. 52′. Eodem pacto puncti distantia in alia quacumque hypothesi determinabitur ex generali formula. Vides, quam propius ad punctum B maxima intumescentia accesserit ex hypothesi nisus horizontalis subdupli. Geometrice loquendo in qualibet hypothesi, extra meridianum intumescentia maxima continget.

Semper enim n^2 minor erit $\sqrt{n^4+1}$, utcumque ad ipsam accedat.

COROLLARIUM V.

§. XXXV. INtumescentia ipsa ex motu horizontali aquarum oriunda ex alio etiam capite crescit, decrescitque, ex minori scilicet, maiorique luminarium declinatione. Quod, ut rite concipiatur, ponamus eamdem figuram meridiani planum repraesentare, in eaque concipiamus punctum N ad terrestrem tropicum pertinere. Triangulum N C T supra axem H M revolvatur, suaque revolutione generabitur conus, cuius apex est C. Superficies curva huius coni in infinitum producta concipiatur, donec concurrat cum luminaris centro, quod fiet, ubi declinatio luminaris aequalis est distantiae tropici ab aequatore. Motus maris in eo tropico oritur a vi perturbatrice per eam superficiem semper directa. Quare tunc ascensus aquae ex motu horizontali oriundus maxime omnium directioni gravitatis opponitur. Quare, caeteris paribus, erit omnium minimus. At luminaribus per planum aequatoris transeuntibus vis perturbatrix horizontalis relate ad ascensum aquae verticalem minime omnium directioni gravitatis opponitur. Quare tunc, caeteris paribus, ascensus aquae maritimae horizontali motu labentes, ita verticaliter ascendent, ac si linea illa verticalis inclinata esset respectu vis perturbatricis. Inde itaque consequitur, intumescentiam aquarum ex motu horizontali genitam, nunquam, caeteris paribus, esse maiorem, quam luminaribus in aequatore constitutis, nunquam esse minorem, quam luminaribus ad suos respectivos tropicos delatis.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Rationem virium perturbatricum, aut maritimarum intumescentiarum ex viribus ☼, & ☾ in diversis telluris distantiis determinare.

§. XXXVI. Distantia indeterminata CS (fig. I.) dicatur $= x$. Semidiameter terrestris $= s$. Vis acceleratrix centri erit ut $\frac{1}{x^2}$ ex hypothesi, aut, si eam vim per lineam quampiam repraesentare velis, ea vis erit ut $\frac{a^3}{x^2}$ ponendo pro a constantem quamcumque. Ad habendam vim acceleratricem puncti B fiat, ut $(x - s)^2 : x^2 = \frac{a^3}{x^2} : \frac{a^3}{(x-s)^2}$, quae erit vis acceleratrix puncti B. Differentia earum virium erit vis perturbatrix, quae quidem aequalis erit $\frac{a^3}{(x-s)^2} - \frac{a^3}{x^2}$. Redactis terminis ad eumdem denominatorem, erit vis perturbatrix ut $\frac{a^3x^2 - a^3(x-s)^2}{x^2(x-s)^2}$; Sive ut $\frac{a^3x^2 - a^3x^2 - a^3s^2 + 2a^3sx}{x^4 + x^2s^2 - 2x^3s}$, sive, ut $\frac{2a^3sx - a^3s^2}{x^4 + x^2s^2 - 2x^3s}$.

At a^3s^2 tenuissimus est respectu $2a^3sx$ ob x enormiter magnam respectu s, & ex eadem ratione duo termini $x^2s^2 - 2x^3s$ contemni sine magno errore possunt respectu x^4. Unde fiet vis perturbatrix proxime ut $\frac{2a^3sx}{x^4}$, sive ut $\frac{a^3s}{x^3}$. Unde fiet hoc theorema. Vires ☼ aut ☾ per-

perturbatrices terrestris superficiei sunt in ratione triplicata distantiarum reciproce, sive sunt ut cubi distantiarum proxime. Coeterum, si quis de exiguis etiam differentiis sollicitus esse velit, obtinebit vires perturbatrices ut $\frac{2a^3 sx - a^3 s^2}{x^2 (x - s)^2}$.

At ramus hyperbolicus GbN ut linea recta sine errore sensibili pro sole assumi potest, & intumescentiae sequuntur rationem trianguli GNE, & triangula eiusdem altitudinis sunt, ut bases, & basis GE est vis perturbatrix. Quare intumescentiae solares erunt satis accurate, ut distantiarum cubi reciproce. At, si pro luna media quaedam mensura pro parte opposita, atque subiecta assumatur, poterit idem theorema valere sine magno errore.

COROLLARIUM I.

§. XXXVII. Ponatur jam terrestris orbitae excentricitas partium 163, quarum radius, seu media distantia est 10000. Erit, ut $10163^3 : 10000^3 = 1.902$ ad quartum, qui quidem erit pedum parisiensium 1. 811. Et haec erit maris intumescentia totalis pro sole commorante in apogaeo.

Fiat deinde, ut $9837^3 : 10000^3 = 1.906$ ad quartum, qui quidem erit pedum parisiensium 1. 998. Et haec erit maris intumescentia totalis pro sole perigaeo in mea gravitatis hypothesi.

COROLLARIUM II.

§. XXXVIII. Lunaris orbitae excentricitas ex cassinianis tabulis eruitur partium 654, quarum media distantia continet 10000. Quare erit, ut $10654^3 : 10000^3 = 8.7492$ ad quartum terminum exhibentem intumescentiam totalem pedum paris: 7. 2348 pro ☾ apogaea in mea terrestris gravitatis hypothesi.

Fiat deinde ut $9346^3 : 10000^3 = 8.7492$ ad quartum ter-

terminum exhibentem ☾ perigaeae intumeſcentiam totalem pedum paris. 10. 7174 in eadem gravitatis hypotheſi.

COROLLARIUM III.

§. XXXIX. INde profecto intelligitur, cur intumeſcentiae tam ſenſibiliter creſcant, ☾ ad telluris centrum accedente, tam vero decreſcant, ea recedente. Nam intumeſcentiae lunares, caeteris paribus, ſunt ut cubi lunaris diſtantiae a telluris centro reciproce. Intelligitur etiam, cur hoc incrementum in ſolaribus viribus ſit ita tenue, ut non ſine difficultate dignoſci poſſit. Nam 1.° vis ſolis perturbatrix eſt multo minor vi lunae perturbatrice. 2.° orbitae lunaris excentricitas eſt quadrupla excentricitatis orbitae terreſtris circa ſolem. Ex hiſce rationibus fit, ut differentia intumeſcentiarum inter maximam, minimamque diſtantiam pro ſole evadat ped. 0. 187, pro ☾ vero pedum 3. 4826. Haec poſtrema, ut vides, novemdecies maior eſt differentia ſolari. Eulerus in ſua *inquiſitione phyſica* §. 41 excentricitatem lunaris orbitae adhibet partium 550, quae videtur minor vera.

PROPOSITIO VIII.

Deſcribere curvam marium, quam Lunae vires perturbatrices ob earum irregularitatem inducunt.

§. XL. PRoblema hoc, quod in tota ſua amplitudine difficillimum eſt, atque tironum vires omnino ſuperat, ita reſtringendum putavi, ut ex ea limitatione facillimum eavadat, atque praecipua curvae maritimae ex ☾ viribus ortae irregularitas deſcribatur. Multa enim ſunt, quae pro ☾ ſolutionem problematis diverſam faciant, atque etiam implicatiſſimam. Nam pro ☼ duae rectae CB, AF, (fig. IV.) in ſolis centro concurrentes, ut parallelae haberi poterant, quod pro immenſa ſolis a terra diſtantia, atque pro telluris exiguitate reſpectu eius diſtantiae ſine ullo errore

ad-

admitti poterat. At pro ☾ non item. Nam semidiameter terrestris ad terrestrem la ☾ distantiam tam sensibilem proportionem obtinet, ut nonnisi cum aliquo sensibili errore, ut parallelae in quocumque semidiametri CH puncto haberi possint. Ex eodem capite oritur novum discrimen, quod scilicet duo puncta M, H pro sole, eiusque exigua parallaxi haberi possint, ut in circulo telluris maximo, eoque respectu ☼ horizontali, constituta. Contra vero pro ☾ duo puncta, in quae cadit tangens lunaris in circulo maximo sine sensibili errore constitui nequeunt. Omitto alia, quae tum discrimen inducunt, tum etiam difficultatem mirum in modum exaugent. At enim cum maximum omnium discrimen in eo situm sit, quod vires solares perturbatrices in aequali distantia a puncto C tam in semidiametro superiori CB, quam in inferiori CD sumptae, ut aequales haberi possint, quod sane pro ☾ sine magno errore fieri omnino nequit, cumque reipsa omnes aliae irregularitates respectu istius sint omnino parvae, problema hoc ita resolvendum putavi, ut inaequalitas omnis in figura terrestri ex hoc titulo genita describatur, reliquae autem omittantur. Ita profecto, & facilitati, & huius quaestionis praecipuis rationibus consulendum putavi. Caeterum, si quis ampliorem solutionem postulet, consulat viros doctissimos, quos toties nominavi Mac-Laurinum, Danielem Bernoullium, Eulerum, a quibus tamen nonnihil etiam desiderabis.

Itaque sit HBMD aequatoris planum, jaceatque ☾ L in eiusdem producta semidiametro CL. Sumpta linea CN, ut in prop. I. factum est, describatur hyperbola Asymptotica secundi ordinis KOINi, quae per punctum N transeat, atque indefinite extendatur. Praecipua curvae irregularitas ab elliptica, aut prope elliptica figura oritur maxime ex eo, quod ramus hyperbolicus in terram incurrens pro linea recta haberi non possit. Quare, ductis perpendicularibus, a punctis B, D ramum hunc in punctis I, i secantibus, ductaque a puncto N recta utrinque extensa ENe ad BD parallela, habebuntur duo triangula mixtilinea NEI, Nei, quorum quadratura geometrice obtineri potest. Nam huius hyperbolae talis est natura, ut rectangulum ex IB $\times$ BL aequale sit spatio interminato hyperbolico IBSs; similiter rectangulum ex NC $\times$ CL aequabit spatium interminatum NCSs.

Ita-

Itaque eorum rectangulorum differentia aequalis spatio hyperbolico I B C N, a quo, si demas rectangulum ex N C X C B, supererit in terminis finitis spatium trianguli mixtilinei I N E. Non dissimili constructione obtinebis spatium alterius trianguli N *e i*; nisi quod in eo non rectangulum a spatio hyperbolico, sed spatium hyperbolicum a rectangulo C *e* detrahi debet. Idem dicendum de aliis punctis quibuscumque, deque aliis triangulis mixtilineis Q P N, *q p* N. At enim triangula haec mixtilinea virium perturbatricum summas repraesentant (per prop. II., eiusque corollariis), atque vires istae perturbatrices haberi possunt, ut vires centrifugae (per prop. IV.) . Quare triangulum mixtilineum I N E vires centrifugas totius canalis B C, aliud autem triangulum Q P N vires centrifugas in canali circuli paralleli A F rite exponet. Idem dicendum de aliis duobus canalibus inferioribus C D, A *f*, quorum vires centrifugae per parallelorum planum agentes, erunt, ut duo triangula mixtilinea *N e i*, N *p q*. Quamobrem ad restituendum aequilibrium columnarum per hasce vires centrifugas amissum, fiat B *g* : F N = triangulum mixtilineum I E N, ad triangulum Q P N, atque ita determinabitur punctum N, aut aliud quodcumque *n* pertinens ad curvam marium praecipuam irregularitatem complectentem. Quod petebatur.

COROLLARIUM I.

§. XLI. HInc intelligitur duas rectas B *g*, DG, sive duas intumescentias punctorum lunae subiectorum, atque punctorum oppositorum sequi rationem duorum triangulorum mixtilineorum I E N, *i e* N. Rursus curvam superiorem H *g* M esse maioris excentricitatis respectu inferioris H G M. Praeterea nemo non videt, ex ipsa constructione facillimum esse, aequationem analyticam eruere, quae naturam eius curvae complectatur, quaeque, si rite evolvatur, omnes eius curvae proprietates manifestare possit. Verum cum hae proprietates quaestionis nostrae elucidationem non magnopere juvent, ab iis definiendis abstinebo.

CO-

COROLLARIUM II.

§. XLII. Hic locus postulat, ut proportionem duarum intumescentiarum Bg, DG, quae ex prop. III. erui non poterat, deducamus. Ibi enim, non soluto adhuc problemate, a viribus perturbatricibus punctorum oppositorum B, D, virium summas eruere non licebat. Neque enim poteram eas summas ponere in ratione rectarum EI, *ei*. Cum enim illa duo triangula rectilinea non sint, sed mixtilinea, rectilineum sub basi IE, & altitudine EN, majus erit triangulo curvilineo IEN; contra vero rectilineum sub *ei*, & *e* N minus erit triangulo mixtilineo *ei* N. Inde, subductis rationibus, multo minor proveniet intumescentiarum differentia, quam sub illa hypothesi fieri posset. Ex eius hyperbolae quadratura proportio est proximè ut 13 : 12.

PROPOSITIO IX.

Vires Solis, aut Lunae ad mare immediate deprimendum determinare.

§. XLIII. HActenus marium depressionem, non ex immediatis luminarium viribus, sed ex affluxu marium uno loco, qui in alio defluxum necessario generat, deduxi, atque vires immediate deprimentes in hunc locum de industria reieci. Nunc autem locus est, ubi de iis viribus, earumque effectibus agere potero, atque demum definire, si quam novam detumescentiam pariant vires istae. Newtonus, aliique ferme omnes de istis viribus vix dubitarunt, atque earum effectum in depressione aquarum constituere. Verum vires istas adesse, atque agere, nec ipse dubito, at earum effectum in depressione aquarum esse positum, vehementer dubito. Res quemadmodum sese habeat, ex sequentibus patebit. Itaque sit (fig. V) CH telluris semidiameter, fiatque CH ad H*s* ut gravitas corporum terrestrium ad vim ☉, aut ☾ acceleratricem; ponaturque H*s* ita, ut centrum ☾ aut ☉ S respiciat. Quare punctum H feretur duabus viribus *s*H, HC tempore eodem. Describatur parallelogrammum

mum $sRCH$, & illius diagonalis HR exponet tam directionem, quam magnitudinem vis compositae, qua feretur punctum H. Ducatur Cs, quae haberi potest, ut aequalis diagonali HR ob exiguam solis parallaxim. Ante virium compositionem AC exprimebat vim puncti H, post compositionem additur lineola As. Quare lineola As repraesentabit virium accessionem ex compositione oriundam. Cum sH haberi possit ut tangens, erit sH^2 aequale rectangulo ex $As \times sZ$. Itaque vis accedens puncto H ex virium compositione, seu vis deprimens, aut augens gravitatem erit tertia proportionalis post diametrum telluris, atque vim acceleratricem eius centri. Est autem quamproxime $SC : CH = Hs : sA$. Quare fiet vis acceleratrix centri ad vim ☼, aut ☾ deprimentem, ut distantia terrae a sole ad terrestrem semidiametrum. Est vero $GB : NC = CS^2 \; BS^2$. Quare dividendo fiet $GE : NC = CS^2 - BS^2 : BS^2$. At $CS^2 = CB^2 + BS^2 + 2CB \times BS$, & CB^2 est quantitas contemnenda respectu aliarum duarum. Quare fiet $GE : NC = 2CB \times BS : BS^2$, sive $GE : NC = 2CB : BS$, seu quamproxime, ut terrestris diameter ad distantiam telluris a centro, aut, ut terrestris semidiameter ad dimidiam terrae a sole distantiam. At erat vis perturbatrix deprimens punctum H, ad vim acceleratricem centri terrestris, ut semidiameter terrestris ad telluris a ☼ distantiam. Unde fiet, ut vis perturbatrix deprimens punctum horizontale H, ad vim ☼ elevantem puncti B, sit proxime ut $1 : 2$, seu, ut vis deprimens subdupla sit vi elevante. Si itaque assumatur $Hg = \frac{1}{2}\, GE$ determinabitur vis quaesita.

COROLLARIUM I.

§. XLIV. Videamus nunc, quid canali centrali HC contingere debeat ex istarum virium accessione. Dico nullum effectum depressionis ex ea accessione sequi posse. Nam ex una parte gravitas particularum in eo canali contentarum augebitur in ratione linearum CH, HR. At ex alia parte, cum directio ex virium compositione immutetur, nisus particularum minuetur in ratione linearum HR, HC. Quare

 mo-

momentum singularum particularum post accessionem virium ☉, & ☾, erit in ratione directa lineae HR, & reciproca eiusdem lineae; sive erit constans. Unde fit, ut, cum tantumdem deprimi debeat columna centralis HC ex virium deprimentium accessione, quantum ex directionis mutatione debeat elevari, eius columnae longitudo nihil immutari debeat ad aequilibrium praestandum; adeoque licet vires deprimentes aliquam actionem eliciant, haec actio non in fluidi depressione, sed in eiusdem pressione contra canalis latera exerceri tota debeat. Atque haec fuit causa, cur in praecedentibus propositionibus virium deprimentium mensuram omiserim, atque eius loco eam adhibuerim depressionem, quae ex affluxu necessario consequitur. Cumque haec etiam depressio subdupla inveniatur elevationis, ut de viribus deprimentibus respectu elevantium ostensum est, inde omnino factum est, ut in eamdem virium totalium mensuram deventum sit, quo Newtonus ex viribus deprimentibus, quae sane hoc loco effectum depressionis non edunt, pervenerat.

COROLLARIUM II.

§. XLV. Quod de punctis horizontalibus H, M ostensum est, idem omnino ostenditur de ☾ in punctis quadraturarum versante. Nam vires solis perturbatrices in ☾ agentes exaugent quidem eius gravitatem, at gravitatis directionem ita immutant, ut, si iterum gravitas ☾ ad telluris centrum referri debeat, eiusdem omnino magnitudinis reperiatur. Quantum enim lunari in terram gravitati accedit ex actione solis, tantum deinde minui debet ad centrum restituendum. Non bene itaque Newtonus vires ☾ perturbatrices deprimentes, ad vires perturbatrices deprimentes maria referre videtur. Nam vires ☾ supputatae sunt nullo habito respectu ad centri mutationem, at vires marium ex centri mutatione supputari etiam debent. Agimus enim de canalis HC depressione, in qua non modo gravitatis augmentum, verum etiam eiusdem directio considerari debet diligentissime. At, ea considerata, vidimus nullam interesse canalis depressionem.

Ita-

Itaque, consideratis iis omnibus, quae problema comitantur, neque valet analogia a viribus ☾ perturbatricibus gravitatem augentibus, ad vires marium perturbatrices deprimentes; neque, si quis valere contendat, ita valebunt, ut ullam pariant marium depressionem.

PROPOSITIO X.

Data elevatione marium ex viribus ☼, aut ☾ perturbatricibus genita, depressionem determinare ex ea elevatione derivatam.

§. XLVI. POsui in antecedentibus propositionibus depressionem ab elevatione manantem subduplam esse elevationis ipsius, nunc autem locus est determinandi eam depressionem accuratius, quae profecto oritur ex manente marium quantitate. Cum enim maria in BO (fig. VI.) ex viribus elevantibus turgescant, neque novum fluidum affundatur, necesse est, ut alicubi, ac praesertim in H mare idem deturgescat. Sit ante intumescentiam BHDM aequatoris planum, sitque post eamdem ONRC planum ellipseos ab intumescentia genitae. Dabitur punctum aliquod N, in quo quadrans aequatoris BNH, cum quadrante elliptico ONR concurrit. Concipiamus plana haec duo circumvolvi. Ex revolutione quadrantis BNH orietur hemisphaerium, ex revolutione quadrantis elliptici gignetur semisphaerois. Basis primi solidi erit circulus H*m*M*m*, basis vero secundi erit alter interior circulus R*s*S*s*. Eius revolutionis assumatur pars quaelibet exigua, sive eius angulus exiguus quilibet NOG, sive NBG. In parallelo N*nnn*, describatur arcus NG, atque in circulo maximo similis arcus H*b*. Atque inde orientur solida duo, quorum alterum est ONGBO, alterum vero NH*b*G*r*RN. Ut conservetur eadem marium quantitas solida haec duo aequalia inter sese erunt. Solidum autem primum ONGBO haberi potest sine errore sensibili, ut solidum rectilineum prismaticum, cuius basis sit triangulum rectilineum, in quo tria latera aequant tres arcus GB, NB, NG, altitudo vero sit BO. Similiter alterum solidum haberi poterit, ut cuneus rectilineus, in quo basis sit figura rectificata H b r R, latitudo apicis sit N G, at altitudo sit ipse arcus H N; idque sine errore sensibili. Immo, cum angulus ad verticem O fieri possit pro libito, talis poni poterit, ut fiat H R = H b. Tunc basis H b r R poni poterit aequalis H R², & reliqua, ut antea. Ex ea aequalitate determinari poterit linea H r. Verum multo facilius ea determinatur ex cubatura sphaerae semidiametro C B descriptae, atque ex cubatura sphaeroidis, cuius semiaxis maior sit C O, minor autem C R. Nam, si semidiameter sphaerae dicatur $= a$. Si C O $= A$, & C R $= b$, ex aequalitate duorum solidorum orietur haec aequatio $a^3 = b^2 A$. Quare si A fiat $= a+c$, erit $a^3 = (a+c)\, b^2$. Unde fiet $a+c : a = a^2 : b^2$. At si fiat $b = a - x$, seu si H r dicatur x, habebitur $a+c : a = a^2 : a^2 + x^2 - 2ax$. At x^2 contemni potest respectu aliarum quantitatum. Quare fiet $a+c : a = a^2 : a^2 - 2ax$, sive $a+c : a = a : a - 2x$. Unde fiet aequatio $a^2 = (a-2x)(a+c)$, sive $a^2 = a^2 + ac - 2ax - 2cx$. Sive $(2a+2c)\, x = ac$. Unde fiet demum $x = \frac{ac}{2a+2c}$. At iterum $2c$ contemni potest respectu $2a$. Quare habebimus proxime $x = \frac{ac}{2a} = \frac{1}{2} c$, sive habebimus detumescentiam H r ex affluxu aquarum in B O oriundam esse ipsius B O semissim quamproxime. Quod petebatur.

PROPOSITIO XI.

Iisdem datis, punctum N communis intersectionis, seu punctum, in quo nulla est maris, nec intumescentia, nec detumescentia determinare.

§. XLVII. Si circuli N B M D semidiameter dicatur a, erit semiaxis maior C O $= a+c$, minor autem C R $= a - \frac{1}{2} c$ (ex prop. antecedente). Aequatio ad circulum abscissis a puncto C computatis est $y^2 = a^2 - x^2$. Aequatio ad ellipsim abscissis similiter computatis est

ex

ex elementis conicorum $y^2 = (a - \frac{1}{2}c)^2 - \frac{(a - \frac{1}{2}c)^2 x^2}{(a+c)^2}$

At in casu problematis N E $= y$ est communis. Quare erit $y^2 = y^2$. Quare $a^2 - x^2 = (a - \frac{1}{2}c)^2 - \frac{(a - \frac{1}{2}c)^2 x^2}{(a+c)^2}$.

Quae quidem aequatio, si rite evolvatur, redigaturque, dabit tandem $x^2 = \frac{ac(a+c)^2}{\frac{3}{4}c^2 + 3ac}$.

Atque x, seu C E $= \sqrt{\frac{ac(a+c)^2}{\frac{3}{4}c^2 + 3ac}}$. Quod petebatur.

Appositis numeris, contemptisque exiguis fractionibus, reperio C E partium 0. 5774, quarum radius est 1.0000. Quare arcus H N, cuius eae partes sunt sinus, fiet 35°. 16′. Et eius complementum B N, aut B n erit 54°. 44′. Cum punctum N habeatur in quatuor circuli quadrantibus, sequitur, puncta quatuor maritima adesse, quae quidem distant 54°. 44′. a punctis B, D, in quibus maris altitudo, aut depressio nulla est. Ab iis punctis usque ad B, aut D, mare turgescit, ab iisdem vero usque ad H, aut M, mare deturgescit.

S C H O L I O N.

§. XLVIII. Si valor ipsius x expeditissime deduci velit, poterimus in eadem formula contemnere, tam $\frac{3}{4}c^2$, quam c in $(a+c)^2$. Unde fiet $x = \sqrt{\frac{a^2 c}{3ac}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. At $\sqrt{3} = 1\ 735$. Quare fiet $x = \frac{100000}{173500} = 0.\ 57640$, atque arcus huic sinui respondens est 35°. 12′, aberrans 4′. tantummodo ab arcu diligentius computato.

Quare sine errore notabili poni potest $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, quae expressio sane est simplicissima.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Data utriusque luminaris positione determinare 1°, eorum positionem respectu meridiani tempore maximae intumescentiae, 2°, eiusdem intumescentiae magnitudinem, 3°. tempus, quo intumescentia eadem dato loco contingit.

§. XLIX. HActenus luminarium vires ad mare attollendum ita consideravimus, ac si separatim agerent in maria, ac modo sol, modo ☾ intumescentiam gigneret; nunc autem eorum actionem coniungemus. Si sola ☾ ageret in locum B (fig VII.) sane omittendo vim inertiae, ac marium diversimodas resistentias, intumescentia maxima contingeret in ipso ☾ transitu per meridianum loci B. Idem de sole asserendum. Tunc intumescentia alterutrius ea esset, quam superioribus propositionibus computavi. Quare, si luminaria coniungantur, aut opponantur, theoria nihil mutabitur. Fiet enim totalis intumescentia in transitu simultaneo luminarium per meridianum loci, atque ea aequalis erit summae intumescentiarum singularum. Verum hic casus in ipsis tantummodo syzygiis contingit, immo contingere nequit adamussim, nisi syzygia in ipso transitu per meridianum celebretur, quod raro admodum usuvenire solet, immo accurate fere nunquam. Communissimus, atque quotidianus est alter casus, in quo luminaribus in ascensione recta dato quolibet angulo ex. gr. SCL distantibus, atque iuxta expositum mecanismum agentibus, intumescentia maxima in aliquo instanti observari debet, quod instans profecto, neque est transitus solis per loci meridianum, neque transitus lunae, sed incidit in quoddam tempus intermedium magis proximum appulsui ☾ ad meridianum, quam appulsui solis ob maiores vires lunares perturbatrices. Determinanda itaque est distantia utriusque luminaris a loci meridiano, cum intumescentia celebratur. Sit videlicet SCL angulus, quem luminaria faciunt, seu ascensionum rectarum differentia; determinandus est angulus RCB, & consequenter SCB, quem planetae directio facit cum meridiano loci. Rursus determinanda est ipsa intumescentia,

tia, quae profecto pro anguli incremento, semper minor est summa intumescentiarum totalium. Cum enim neutrum luminare sit in plano meridiani, ubi intumescentia contingit, ea minor erit duplici ex causa, scilicet propter distantiam ☼, atque propter ☾ distantiam a meridiano. Cum denique tempus intumescentiae appulsum alterutrius luminaris praeveniat, alterius vero consequatur, maximi interest tempus ipsum accurate definire. Atque haec, quae proponuntur, tum gravissima sunt, tum difficillima; gravissima quidem, quia meliora, atque admirabiliora phoenomena ab eo problemate pendent, difficillima vero, quia, si rem geometrice tractare velis, ad methodum *de maximis, & minimis* confugere necesse erit. Si enim rem rite consideres, nihil aliud quaerimus, nisi maximam luminarium actionem in data distantia positorum. At actio luminarium sequitur quadratum sinus complementi anguli RCB, aut vero SCB (per cor. I., & II. prop. V.). Quare mechanicum hoc problema incidit in problema geometricum, quod est huiusmodi.

§. L. Sit angulus quidam datus, atque constans SCL, cuius duo latera CS, CL, sint in ratione data; quae ratio in casu nostro ea est, quam habent vires perturbatrices solis, & lunae. Sit alia linea immobilis BC alteri HK perpendiculariter insistens, circa quam angulus datus ita oscillare potest, ut eius latera cum fixa CB diversas positiones constituant. Radio CS describatur semicirculus, atque a punctis S, R ducantur ad lineam immobilem perpendiculares duae SA, RN. Fiat, ut quadratum radii CR ad quadratum lineae NC, quae est sinus anguli NRC, ita CL ad quartum terminum, & similiter fiat CS^2, ad CA^2, ita eadem CS vim ☼ repraesentans, ad quartum terminum. Iam vero quaeritur talis duorum laterum positio, sub qua ii duo termini simul sumpti sint *quid maximum*. Sit igitur sinus totalis $= t$. CS repraesentans solis vim $= 1$. CL repraesentans vim ☾ perturbatricem $= V$. Sinus anguli dati SCL $= s$. Eiusdem complementum $= c$. Linea CN, quae est sinus anguli NRC $= x$. Eius anguli complementum BCR est distantia ☾ a meridiano in momento actionis maximae, sive aestus reciproci.

Erit 1.° actio ☾ ad attollendum mare in BO $= Vx^2$.

Erit

Erit 2°. linea NR $= \sqrt{t^2 - x^2}$, 3°, si SA extendatur in M, & a puncto S ducatur SP ad CL normalis, orietur triangulum rectangulum SPM simile triangulo CNR. Cum sit SP aequalis sinui anguli dati SCL, erit ea linea $= s$. Fiet igitur CN : NR = SP : PM, seu $x : s = \sqrt{t^2 - x^2} :$ $\frac{s}{x}\sqrt{s^2 - x^2}$, qui est valor lineae PM. Erit 4°. CP $= c$, quare CM $= c + \frac{s}{x}\sqrt{t^2 - x^2}$. Erit 5°. CR : CN = CM : CA, sive $t : x = c + \frac{s}{x}\sqrt{t^2 - x^2} : \frac{cx}{t} + \frac{s}{t}\sqrt{t^2 - x^2}$ = CA. Cuius quadratum erit $\frac{(c^2 - s^2)x^2}{t^2} + s^2$ $+ \frac{2cx}{t}\sqrt{s^2 - \frac{s^2x^2}{t^2}}$. Summa igitur actionum ☾, & ☼ fiet $Vx^2 + \frac{(c^2 - s^2)x^2}{t^2} + s^2 + \frac{2cx}{t}\sqrt{s^2 - \frac{s^2x^2}{t^2}}$. Brevitatis gratia fiat $V + \frac{(c^2 - s^2)}{t^2} = B$, aut $\frac{Vt^2 + c^2 - s^2}{t^2} = B$.

Et erit maximum illud aequale $Bx^2 + s^2 + \frac{2cx}{t}\sqrt{s^2 - \frac{s^2x^2}{t^2}}$

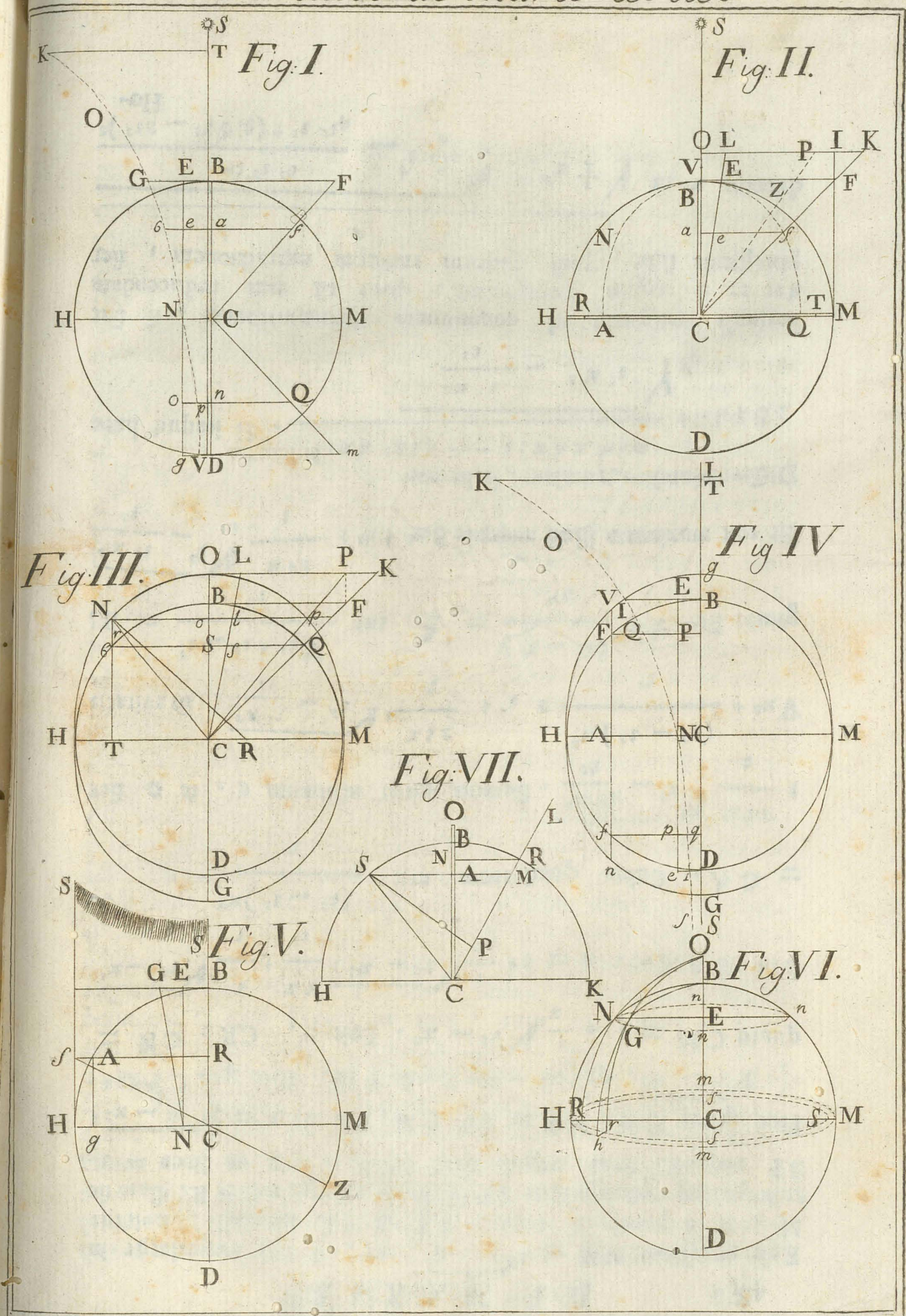
Differentiando formulam, habemus

$$2Bx\,dx + \frac{2cs^2x\,dx : t - 4cx^3\,dx : t^3}{\sqrt{s^2x^2 - \frac{s^2x^4}{t^2}}}.$$ Si itaque haec formula redigatur ad communem denominatorem, si fiat $dx = 0$, atque peragantur, quae ad eam reducendam peragenda sunt, post duarum radicum extractionem, fiet demum

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}t^2 + \sqrt{\tfrac{1}{4}t^4 - \frac{c^2s^2t^4}{4c^2s^2 + (5.6t^2 - 2s^2)^2}}}$$

Ho-

Dissertatio de Maris æstu



Horum duorum valorum, ut patet, ſumendus eſt is, qui in ſecunda radice habet ſignum poſitivum. Atque haec eſt formula generalis, qua obtinetur valor x, ſeu ſinus anguli CRN, cuius complementum eſt angulus quaeſitus BCR. Quod erat primum.

Ad intumeſcentiam actualem BO obtinendam fiant duae analogiae. Scilicet 1°, ut quadratum ſinus totius, ad quadratum ſinus inventi x, ita intumeſcentia totalis ☾, ad quartum, qui exhibebit intumeſcentiam actualem ſub lunari poſitione reperta. Deinde, cum habeatur angulus elongationis SCL, eius differentia ab angulo reperto BCR dabit angulum SCA, cuius complementum innoteſcet. Quare fiat haec altera Analogia. Ut ſinus totalis quadratum, ad quadratum ſinus anguli CSA, ita vis ☉ totalis, ad quartum, qui exhibebit vim ſolis actualem. Summa duarum virium actualium ſuppeditabit actualem intumeſcentiam, quae ſecundo poſtulabatur.

Tertium. Angulus quaeſitus BCR convertatur in tempus medium, quod aeſtus accelerationem, aut retardationem exhibebit. Quod ultimo quaerebatur.

COROLLARIUM I.

§. LI. Si iam quaeramus, quid contingat, ubi luminaria ſyzygias celebrant, in eo caſu fiet $s = o$. Quare in formula terminus $\dfrac{c^2 s^2 t^4}{4c^2 s^2 + (5.6 t^2 - 2 s^2)^2}$ evaneſcit.

Supererit igitur $x = \sqrt{\frac{1}{2} t^2 + \sqrt{\frac{1}{4} t^4}} = t$; ut defacto eſſe debet. Si deinde ex eadem formula quaeramus caſum quadraturae, in quo $s = t$, & $c = o$, animadvertemus, eumdem omnino terminum pro quadratura evaneſcere. Quare in quadraturis iterum $x = t$, ſeu intumeſcentia maxima in ipſo ☾ appulſu ad meridianum continget.

COROLLARIUM II.

§. LII. MAxima aeſtus acceleratio continget, ubi idem terminus evadet quid maximum, tunc enim x evadet quid minimum, adeoque eius complementum evadet maximum. Cum vero in ea formula valor s haberi poſſit per c, aut contra, ſi alterutrius litterae valor, ut variabilis ponatur, ſubinde formula differentietur, ac de more redigatur, habebitur angulus elongationis ☾, & ☼, ſub quo maxima fiet aeſtuum retardatio. Hic autem angulus eſt proxime graduum 50. Quare maxima acceleratio cadet circa diem quartum ☾ a ſyzygiis, retardatio vero circa diem quartum a quadraturis. Quare ex virium lunarium, atque ſolarium conſpiratione acceleratio aeſtus a die ſyzygiarum, uſque ad diem ab iis quartum creſcit, ſubinde a die quarto uſque ad alterutram quadraturam decreſcit; a quadratura ad quartum diem retardatio eſt maxima, ab eo die, uſque ad novam ſyzygiam retardatio decreſcit, donec in ſyzygia aeſtus, reſiſtentiis ſemotis, in ipſa ☾ culminatione contingat. Ex eadem formula ſupputata eſt tabula prima aeſtuum, in qua prima columna exponit angulum elongationis ☾ a ☼ in aſcenſione recta ad ſingulos decem gradus. Secunda exhibet tempus accelerationis, aut retardationis aeſtuum ex angulo conveniens, reſpectu tranſitus lunaris per meridianum. In tertia exhibetur intumeſcentia ex ☼ viribus. In quarta intumeſcentia ex lunae viribus. In quinta demum intumeſcentia actualis, quae ex utraque componitur.

SCHOLION I.

§. LIII. NOn ignoro, magnam eſſe diſſenſionem inter tabulam hanc, atque ſimilem tabulam a doctiſſimo viro Daniele Bernoullio ſupputatam in ea diſſertatione, quae ab Academia Pariſienſi proemio donata fuit. Nihil enim eſt, in quo hae duo tabulae non diſſideant. Diſſident in maxima acceleratione, quae juxta Bernoullium cadit in angulo luminarium 60°; at juxta meam tabulam in angulo 50°. Diſ-

Diffident in ipfius maximae accelerationis menfura, quae juxta Bernoullium eft $46\frac{1}{2}$ minutorum, at juxta meam ad 17 minuta non affurgit. Diffident denique in accelerationibus fingulis. Nam ex causa acceleratio debita angulo luminarium 10° eft juxta Bernoullium $11\frac{1}{2}$ minutorum, at juxta meam tabulam 4′ (1). Verum, cum res haec non auctoritate, quae in Bernoullio magna eft, in me autem nulla, fed potius ratione, & demonftrationibus decernenda fit, doctiffimos geometras rogo, ut rationes ipfas, ac formulas rite perpendant. Et quoniam maximum harum tabularum difcrimen oritur a ratione virium folarium, atque lunarium, quae quidem ratio a Bernoullio, diffentientibus omnibus, ponitur, ut 2 : 5, a me vero ut 1 : 4.6, confentiente Newtono, (2) aliisque fummis viris, illud praefertim deprecor, ut ratio haec perpendatur. Nam obfervationes plurimae, quas confulere potui, rationem fane exhibent a Bernoulliana longe diffentientem. At obfervatio Domini Thouroudi ad Sanctum Maclovium habita, nefcio, an ita a Bernoullio intellecta fit, quemadmodum intelligi, aut poteft, aut debet. Haec enim funt obfervatoris verba. *Dans les grandiffimes marées la mer s' eleve de 50 pedes en plomb au-deffus du bas de l' eau; dans les marées bâtardes, elle ne différe, que de quinze pieds.* Haec autem verba ita interpetratur Bernoullius, ac fi altitudo aeftuum in quadraturis effet pedum 15, atque inde fuam proportionem deducit. At vereor, ne rectius, atque commodius ita fumenda fint, ut non altitudo aeftuum in quadraturis, fed eorum differentia ab aeftubus maximis pedibus 15 taxanda fit. Quod fi ita fumerentur, effent aeftus maximi ad minimos, ut 50 : 35, quemadmodum aliae obfervationes exhibere folent. Verum, tum de obfervationis interpetratione, tum de totius tabulae difcrimine, eruditiffimorum virorum judicium efto.

(1) Tabula haec Bernoulliana, cui meam comparavi inferta eft in eius *Traité fur le flux, & reflux de la Mer.*

(2) Pag. 189. Tom. III. Partis I. Comment. New. PP. Le feur, & Iacquier.

SCHOLION II.

§. LIV. Cum tabulae aestuum Bernoullianae ei problemati, de quo dixi, innitantur, cumque in eo problemate, praeter coetera, erronea mihi videatur ea virium lunarium, atque solarium proportio, cui anguli positionis, & aestuum accelerationes superstruuntur; si ratio virium corrigatur, tempora accelerationum tam exigua evadent, ut phoenomenis explicandis ea sola satis esse non possint. Nam ex innumeris observationibus ad portum Gratiae, Baionae, atque Doncherchii diligenter institutis, atque a Cassino correctis, invicemque comparatis deducitur, a syzygiis ad quadraturas differentiam temporis intercedere $5^h. 14'$, ut ad portum Gratiae, & Baionae definitum fuit, aut $5^h. 12'$, ut postulant observationes Doncherchianae (1). Iam vero, si aestus fieret in ipso ☾ appulsu ad meridianum, esset aestus quadraturae $6^h. 12'$. Nam horae 6 debentur angulo 90° ☼ inter, & ☾, & $12'$ debentur motui lunari intra horas ipsas sex. Quare acceleratio totalis aestuum a syzygiis ad quadraturas esset, aut 58, aut 60 minutorum. At ex angulo positionis correcto eruerentur sola $20'$ circiter. Quare sola acceleratio, quae in aestu contingit ex solo positionis angulo a recta virium ☾, & ☼ proportione supputato, satis esse non potest ad totam accelerationem explicandam. Si igitur tabulae omnes Bernoullianae ex hoc angulo corrigantur, non poterunt omnem aestus accelerationem a syzygiis ad quadraturas recte repraesentare. Verum, si bene attendamus ad aestuum ipsorum magnitudines, animadvertemus, in iis aliquid esse, quod aestus etiam acceleret. Nam, ubi aestus sunt maximi, maximi etiam sunt defluxus, quos luna simul, & sol conspirantibus viribus gignunt. Quare punctum, a quo mare turgescere incipit, est humilius, atque omnium maxime depressum. Contra vero in quadraturis. In iis enim, ubi luna mare deprimit, sol attollit. Quare punctum, unde intumescentia crescere incipit, est omnium altissimum. Inde sane consequitur, tempora implectionum paria esse

(1) Consule Comment. Regiae Acad. Paris. ad annum 1710.

esse non posse. Nam in syzygia a puncto humiliori affluxus aquarum incipiunt, in quadratura vero a puncto sublimiori. Quod si undarum aeque crassarum obscillationes isochronae fiant, erunt magnitudines aestuum in ratione directa temporum implendo, atque attollendo insumptorum. Si iam ed elevandam maximam intumescentiam tempus $2^h . 15'$ insumatur, ut observationibus consentaneum videtur, inde accelerationes novae aestuum oriuntur, quae cum aliis accelerationibus, ac retardationibus aestuum invicem comparatae novam accelerationem a syzygia ad quadraturam suppeditabunt, quae quidem est $58'. 34''$. His igitur fundamentis, partim a commodioribus formulis, partim a correctiori virium ☾, & ☼ ratione, partim ab undarum obscillantium isochronia desumptis, tabulas duas concinnavi, in quibus mediae aestuum magnitudines, media etiam aestuum mediorum tempora supputantur. Prima tabula tota est de angulo positionis lunaris iuxta problema, atque de aestuum magnitudinibus. In prima eiusdem tabulae columna exhibentur anguli elongationis ☾ a ☼ juxta ascensionem rectam. Elongatio, juxta quam fit intumescentia maxima ponitur 20°, ut Bernoullius ipse jure, ac merito constituerat. Nam revera intumescentiae maximae post tertium aestum a syzygia plerumque a mathematicis collocantur. Tunc elongatio ☾ a ☼ est graduum circiter 20. Secunda eiusdem tabulae columna exhibet angulum, quem luna facit cum meridiano juxta problema, ita tamen, ut in ipsa intumescentia maxima angulus hic supponatur nullus, in aliis intumescentiis, modo additivus sit, modo subtractivus ex rationibus a Daniele Bernoullio satis superque perpensis. Tertia, & quarta columna exhibent intumescentias lunares, atque solares separatim ex proecepto supputatas, atque angulis positionum respondentes. In quinta columna fit duarum intumescentiarum aggregatum, conflaturque inde intumescentia totalis elongationi respondens, quae tamen a puncto infimo defluxuum supputetur. Duae enim sunt omnino rationes aestus maritimos observandi. Prima ea est, in qua aestuum diurnorum altitudines a maxima maris depressione, quae est post tertium a syzygia defluxum, determinantur. Altera, in qua aestus diurni altitudo a defluxu immediate antecedenti, aut sequenti de-

desumitur. Priores altitudines a columna quinta, posteriores vero a sexta indicantur. Intumescentiam maximam, a qua aliae deducuntur, eam assumendam iudicavi, quae in mea gravitatis terrestris hypothesi deducta fuit, quaeque est pedum parisiensium 10. 651. Ratio virium solarium, atque lunarium ea adhibita, quae posita iam in tota dissertatione fuerat, ut 1: 4. 60. Haec de tabulae primae elementis. Ad secundam quod attinet, iterum elongationum anguli in prima columna consignantur, ut subinde accelerationes, aut retardationes aestuum ipsis respondentes exhibeantur. In secunda columna notatur ea acceleratio, aut retardatio, quae oritur ab angulo lunaris positionis in tempus medium commutato. Tertia columna ostendit intumescentiarum accelerationes ab eorum magnitudine oriundae, in qua tempus insumptum ad intumescentiam maximam attollendam ponitur $2^h.15'$, alia vero tempora iuxta directam altitudinum rationem. Duarum accelerationum, aut retardationum summa, vel differentia exhibet aestuum accelerationes a syzygia ad quadraturas, aut contra. Usus tabularum est, ut data intumescentia media syzygiarum pro aliquo portu, atque data hora media eiusdem intumescentiae a transitu ☾ per meridianum supputata, intumescentiae mediae pro quolibet angulo elongationis, aut pro quolibet ☾ die, atque tempora earum intumescentiarum supputentur. Nam pro dato ☾ die datur ex computo, aut ex aliqua ephemeride transitus ☾ per meridianum, adeoque angulus elongationis ei diei conveniens. Fiat 1.° haec analogia, ut altitudo aestus in ipso syzygiae momento ex tabula erutus, ad altitudinem pro data elongatione in tabula competentem, ita altitudo aestus in eo portu in syzygiarum articulo observata, ad quartum terminum, qui aestus altitudinem pro dato ☾ die in eo portu exhibebit. Deinde ab elongationis angulo in secunda tabula, eruatur aestus acceleratio, aut retardatio in postrema columna consignata, eaque acceleratio detrahatur ab hora appulsus ☾ ad meridianum dato die. Huic tempori addatur hora, qua aestus in dato portu celebratus est ipso syzygiarum die. Summa horum temporum exhibebit horam aestus pro die dato, in dato portu. Et quoniam non ipso syzygiarum articulo, sed aut ante aut post, aestus celebrantur, inde fit, ut aut correctio cassiniana ad rem hanc adhibenda sit, aut

ipsum

ipſum temporis diſcrimen inter aeſtum, & tranſitum ☾ per meridianum loci in praecedenti ſyzygia adhibendum ſit. Coeterum multa adhuc reſtant, ut intumeſcentiae verae, ac tempora intumeſcentiarum non media, ſed vera exhibeantur. Nam iuxta diverſas luminarium, tum a terra diſtantias, tum declinationes variant intumeſcentiae ipſae. Iuxta diverſas diſtantias mutatur etiam ratio virium ☉, & ☾. Quare non idem eſt angulus poſitionis a problemate deductus, ſed in problematis formula introducenda eſt diverſa virium ratio a diſtantiis luminarium diverſis genita. Mutato poſitionis angulo, mutatur retardationis, aut accelerationis ab ipſo menſura. Mutatur itaque, ex hoc nomine acceleratio actualis aeſtus. At eadem acceleratio mutatur etiam ab aeſtuum magnitudine. Quare nova ex hoc etiam titulo inſinuatur accelerationis mutatio. Nihil ergo mirum, ſi tam in intumeſcentiae magnitudine, quam in accelerationis tempore tabulae iſtae menſurarum mediocrium a veris, tum temporibus, tum intumeſcentiis diſcrepent. Tabulas novas ad veros motus ſupputatas in aliud tempus reiicio. Nam, ſi quis vellet, eas poſſet ex meis elementis conſtruere; at ipſe ad eas bene conſtruendas novas aeſtuum obſervationes expectandas arbitror. Interea tamen mearum tabularum cum praecipuis, ac generalibus obſervationibus conſenſio animadvertenda eſt. Nam in ipſa quadratura tempus accelerationis ex tabula II. eſt 58′. 34″. Tranſitus ☾ ad meridianum in quadratura media incidit 6.ʰ 12′ a meridie. Deductis igitur 58′. 34″, quae eſt tabulae acceleratio pro quadratura, ſuperſunt 5.ʰ 13′. 26′. Id iuxta tabulam eſt totum tempus ab aeſtu ſyzygiae ad aeſtum quadraturae. Iam vero, uti monui, tempus hoc ex innumeris obſervationibus petitum Doncherchi eſt 5.ʰ 12′. Baionae eſt 5.ʰ 14′. Similiter ad portum Gratiae eſt 5.ʰ 14. Mea acceleratio inter haſce accelerationes ita media eſt, ut 34″ differat a tempore Baionae, & in portu Gratiae conſtituto ex duplici obſervationum ſerie. Advertendum etiam eſt, ex meis tabulis accelerationem maximam, non quidem in ipſa quadratura, ſed ad 96° elongationis, ſeu prope alterum aeſtum a quadratura incidere, & ad 100° eſſe maiorem, quam ad 90°. Quod quidem num obſervationibus reſpondeat, omnino ignoro. Non enim tot,

tam-

tamque accuratas obſervationes habemus, quae tam exiguae differentiae, (quae quidem ad $2'$ non aſſurgit) perpendendae ſatis eſſe poſſint. Immo ea mihi ſententia eſt, obſervationem hanc ita eſſe arduam, tum ob ingentem difficultatem notandi momentum maximae excreſcentiae, tum etiam, ac praecipue ob laborem, aut inveniendi, aut per computum inducendi coeterarum circumſtantiarum aequalitatem, ut omnem etiam aſtronomicam ſubtilitatem excedat. Adde, quod hoc idem *maximum* ad quadraturam magis accederet, ſi elongatio in aeſtu ſyzygiarum maximo fieret 18°, ut ſane ex multis obſervationibus fieri poſſet. Magna etiam huic maximae accelerationi mutatio accidit ex aliis elementis, ſcilicet ex diverſa ratione inter vires ☉, & ☾, ex diverſa etiam maximorum, & minimorum aeſtuum ratione, quae non modo a diverſa ratione virium, verum etiam a diverſa luminarium declinatione dependet. Ab his omnibus exiguorum temporum computis nunc ſuperſedendum cenſeo, quibus tamen aditus per theoriam hanc eſt patefactus.

TA-

TABULA I.

De angulo positionis Lunaris, deque intumescentiis ex ☾, & ☼ viribus.

Angulus elongationis ☾ a ☼ in Ascensione recta.		Angulus positionis lunae ad meridianum.		Intumescentia ex lunae viribus.	Intumescentia ex solis viribus.	Intumescentia composita relate ad infimū punctum.	Intumescentia cōposita relate ad detumescētiam respondente
°		°	′	Ped. Parif.	Ped. Paris.	Ped. Paris.	Ped. Paris
0	360	2.	22	8. 734	1. 727	10. 461	10. 286
10	350	1.	13	8. 745	1. 858	10. 603	10. 559
20	340	0.	0	8. 749	1. 902	10. 651	10. 651
30	330	1.	13	8. 745	1. 858	10. 603	10. 559
40	320	2.	22	8. 734	1. 727	10. 461	10. 286
50	310	3.	18	8. 720	1. 518	10. 238	9. 854
60	300	3.	53 ½	8. 709	1. 241	9. 950	9. 289
70	290	4.	6	8. 704	0. 921	9. 625	8. 644
80	280	3.	48	8. 711	0. 589	9. 300	7. 987
90	270	2.	48	8. 728	0. 285	8. 913	7. 296
100	260	2.	18	8. 735	0. 086	8. 821	7. 005
110	250	0.	0.	8. 749	0. 000	8. 749	6. 847
120	240	2.	18	8. 735	0. 086	8. 821	7. 005
130	230	2.	48	8. 728	0. 285	8. 913	7. 296
140	220	3.	48	8. 711	0. 589	9. 300	7. 987
150	210	4.	6	8. 704	0. 921	9. 625	8. 644
160	200	3.	53 ½	8. 709	1. 241	9. 950	9. 289
170	190	3.	18	8. 720	1. 518	10. 238	9. 854
180	180	2.	22	8. 734	1. 727	10. 461	10. 286

TABULA II.

De acceleratione, aut retardatione aestuum, tum ex eorum magnitudine, tum ex virium conspiratione.

Angulus elongationis ☾ a ☼ in ascensione recta.		Acceleratio, aut retardatio ex virium conspiratione.			Acceleratio ab aestus magnitudine.		Acceleratio totalis ex utraque conflata.		
°	°	′	″		′	″	h	′	″
0	360	9.	28.	retar.	4.	38		0.	0
10	350	4.	52	retar.	1.	10		1.	8
20	340	0.	0		0.	0		4.	50
30	330	4.	52	acce.	1.	10		10.	52
40	320	9.	28	acce.	4.	38		18.	56
50	310	13.	12	acce.	10.	7		28.	9
60	300	15.	34	acce.	17.	16		37.	40
70	290	16.	25	acce.	25.	27		46.	41
80	280	15.	12	acce.	33.	46		53.	48
90	270	11.	12	acce.	42.	32		58.	34
100	260	9.	12	acce.	46.	13	1.	0.	15
110	250	0.	0		48.	13		53.	3
120	240	9.	12	retar.	46.	13		41.	51
130	230	11.	12	retar.	42.	32		36.	10
140	220	15.	16	retar.	33.	46		23.	24
150	210	16.	25	retar.	25.	27		13.	52
160	200	15.	34	retar.	17.	16		6.	32
170	190	13.	12	retar.	10.	7		1.	45
180	180	9.	28	retar.	4.	38		0.	0

OPUSCULA

PHYSICA